

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**



ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

# **ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΤΑ ΒΟΥΣ-WEN**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΤΙΤΛΟ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ  
ΥΠΟΒΛΗΘΕΙΣΑ ΣΤΗΝ ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΥ Ε.Μ.Π.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ Ε. ΧΑΡΑΛΑΜΠΑΚΗ  
ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ Ε.Μ.Π., MSC DIC

ΑΘΗΝΑ, ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2009



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**



ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

## **ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΤΑ ΒΟΥΣ-WEN**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ  
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ Ε. ΧΑΡΑΛΑΜΠΑΚΗ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2009

Συμβουλευτική Επιτροπή:

Β. Κουμούσης (Επιβλέπων)

Ι. Κατσικαδέλης

Ε. Σαπουντζάκης

Καθ. Ε.Μ.Π.

Ομότ. Καθ. Ε.Μ.Π.

Αναπλ. Καθ. Ε.Μ.Π.





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**



ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

**ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΟΡΕΩΝ  
ΜΕ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΤΑ ΒΟΥC-WEN**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ  
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ Ε. ΧΑΡΑΛΑΜΠΑΚΗ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2009

Συμβουλευτική Επιτροπή:	Β. Κουμούσης (Επιβλέπων)	Καθ. Ε.Μ.Π.
	Ι. Κατσικαδέλης	Ομότ. Καθ. Ε.Μ.Π.
	Ε. Σαπουντζάκης	Αναπλ. Καθ. Ε.Μ.Π.

---

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή:

---

Β. Κουμούσης	Ι. Κατσικαδέλης	Ε. Σαπουντζάκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Ομότ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

---

Μ. Παπαδρακάκης	Μ. Κωτσοβός	Β. Πανοσκάλτης	Π. Τσόπελας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Δ.Π.Θ.	Αν. Καθηγητής Π.Θ.

Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ  
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ



---

**Αριστοτέλης Ε. Χαραλαμπίκης**

Πολιτικός Μηχανικός ΕΜΠ, MSc DIC

Υποψήφιος Διδάκτωρ του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

© 2009, Αριστοτέλης Ε. Χαραλαμπίκης

Το έργο συγχρηματοδοτείται

- 80% της Δημόσιας Δαπάνης από την Ευρωπαϊκή Ένωση – Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
- 20% της Δημόσιας Δαπάνης από το Ελληνικό Δημόσιο – Υπουργείο Ανάπτυξης – Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας
- και από τον Ιδιωτικό Τομέα

στο πλαίσιο του Μέτρου 8.3 του Ε.Π. Ανταγωνιστικότητα – Γ' Κοινοτικό Πλαίσιο Στήριξης.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν αντιπροσωπεύουν κατ' ανάγκη τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Πρόλογος - Ευχαριστίες

Η συγγραφή αυτών των γραμμών, οι οποίες διαβάζονται πρώτες αλλά γράφονται τελευταίες, σηματοδοτεί την ολοκλήρωση μιας προσπάθειας που διήρκεσε περί τα πέντε χρόνια. Καρπός αυτής της προσπάθειας είναι η παρούσα διδακτορική διατριβή, η οποία μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με ερευνητικά θέματα της επιστήμης του Δομοστατικού Μηχανικού.

Η διατριβή δεν θα μπορούσε να είχε ολοκληρωθεί χωρίς την σημαντική συνδρομή ορισμένων ανθρώπων, τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω εδώ.

Κατ' αρχήν, τον επιβλέποντα κ. **B. Κουμούση**, Καθηγητή Ε.Μ.Π., με τον οποίο είχα την χαρά να συνεργαστώ κατά την διάρκεια της διατριβής. Η καθοδήγηση και οι συμβουλές του ήταν καθοριστικές για την πρόοδο αυτού του πονήματος.

Το μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, Ομότιμο Καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. **I. Κατσικαδέλη** για όλη την συμβολή του και ιδιαίτερα κατά τις συνεδρίες της επιτροπής στην τελευταία φάση.

Το μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, Αναπλ. Καθηγητή Ε.Μ.Π., κ. **E. Σαπουντζάκη**, για την συμβολή του και τις ουσιαστικές του παρατηρήσεις.

Τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής: τον **M. Παπαδρακάκη**, Καθηγητή Ε.Μ.Π., τον **M. Κωτσοβό**, Καθηγητή Ε.Μ.Π., τον **Π. Τσόπελα**, Αν. Καθηγητή Π.Θ. και ιδιαίτερα τον **B. Πανοσκάλτη**, Αν. Καθ. Δ.Π.Θ., του οποίου οι παρατηρήσεις ήταν άκρως διευκρινιστικές, δεδομένης και της εξειδίκευσής του σε θέματα θεωρίας της πλαστικότητας.

Επίσης, τον **Σάββα Τριανταφύλλου**, Υπ. Διδ. ΕΜΠ, για την ανεκτίμητη βοήθεια του σχετικά με το λογισμικό Plastique, τον **Χρήστο Δήμου**, Δρ. ΕΜΠ, για τις θυελλώδεις συζητήσεις μας, την **Ελένη Χατζή**, Υπ. Διδ. Columbia University, την **Φωτεινή Μίχου**, Υπ. Διδ. ΕΜΠ, καθώς και τον **Μανώλη Χατζή**, Υπ. Διδ. Columbia University.

Τον **Παναγιώτη Δήμιζα**, Υπ. Διδ. ΕΜΠ, ο οποίος έφυγε από τη ζωή τόσο νωρίς, με τον οποίο συνεργαστήκαμε στενά ανταλλάσσοντας απόψεις και τον οποίο θα θυμάμαι πάντα με εγκαρδιότητα.

Τους κοντινούς μου φίλους οι οποίοι με στήριξαν στην προσπάθειά μου αυτή: τον **Φώτη Φωτόπουλο**, Υπ. Διδ. ΕΜΠ, τον **Στέφανο Χατζηνάκη**, Μηχ. Η/Υ, Μ.Sc, τον **Γιάννη Χατζηγιαννέλη**, Πολ. Μηχ., Μ.Sc, τον **Γιώργο Λυκίδη**, Δρ. ΕΜΠ, την **Μαρία-Κατερίνα Νικολινάκου**, Δρ. ΜΙΤ.

Τους **Χρήστο Κατσάρα**, Πολ. Μηχ., Μ.Sc., και **Χρήστο Κακλαμάνη**, Πολ. Μηχ., Μ.Sc, για τις εποικοδομητικές συζητήσεις που είχαμε.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να παραλείψω την αμέριστη στήριξη που μου παρείχαν η οικογένειά μου και η σύντροφός μου **Χρύσα**.

*By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work.*

**John von Neumann**



## Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>29</b>
1.1	Γενικά	31
1.2	Αντικείμενο της διατριβής	32
1.3	Διάρθρωση και πρωτοτυπία της διατριβής	32
<b>2</b>	<b>Υστέρηση</b>	<b>39</b>
2.1	Εισαγωγή	41
2.2	Υστέρηση	41
2.3	Μαθηματική θεωρία της υστέρησης	42
2.3.1	Γενικά	42
2.3.2	Συνθήκη αιτιότητας ή ιδιότητα Volterra	45
2.3.3	Συνθήκη ανεξαρτησίας από την ταχύτητα	47
2.3.4	Ιδιότητα μονοτονικότητας	49
2.3.5	Ιδιότητα συνέχειας	50
2.3.6	Ιδιότητα υποσυνόλου	50
2.3.7	Ιδιότητα διατάξεως	51
2.3.8	Υστερητικοί τελεστές με εσωτερικές μεταβλητές	51
2.4	Συναφή υστερητικά προσομοιώματα	52
2.4.1	Το προσομοίωμα Preisach	52
2.4.2	Το προσομοίωμα Masing	53
2.4.3	Το προσομοίωμα Kuhn	54
2.5	Εμπειρικά υστερητικά προσομοιώματα	54
2.5.1	Πολυγραμμικά υστερητικά προσομοιώματα	55
2.5.2	Πολυκαμπυλόγραμμα υστερητικά προσομοιώματα	57
<b>3</b>	<b>Υστερητικά Προσομοιώματα Τύπου Bouc-Wen</b>	<b>59</b>
3.1	Εισαγωγή	61
3.2	Προσομοίωμα Bouc	61
3.2.1	Αρχικό προσομοίωμα Bouc (1966)	61
3.2.2	Η περίπτωση του εκθετικού μονώνυμου	65
3.2.3	Η περίπτωση του εκθετικού πολυωνύμου	66
3.2.4	Μια γενικότερη περίπτωση	68
3.2.5	Τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc 2 (1967)	69
3.2.6	Τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc 3 (1971)	70
3.3	Προσομοίωμα Bouc-Wen	70
3.3.1	Αρχικό προσομοίωμα Wen (1976)	70

3.3.2	Τροποποιημένο προσομοίωμα Wen (1980) .....	71
3.3.3	Προσομοίωμα Baber-Wen (1981) .....	72
3.4	Προσομοίωμα Baber-Noori .....	73
3.4.1	Αρχικό προσομοίωμα Baber-Noori (1985) .....	73
3.4.2	Εναλλακτικό προσομοίωμα Baber-Noori (1986) .....	74
3.5	Προσομοίωμα Foliente (1995) .....	75
3.6	Προσομοίωμα Sivaselvan – Reinhorn (2000) .....	76
3.6.1	Βασικό προσομοίωμα .....	77
3.6.2	Ασύμμετρη ροπή διαρροής .....	80
3.6.3	Μείωση δυσκαμψίας .....	81
3.6.4	Μείωση αντοχής .....	88
3.6.5	Στένωση .....	92
3.6.6	Παραμορφωσιακή κράτυνση .....	96
<b>4</b>	<b>Υστερητικό Προσομοίωμα Bouc-Wen .....</b>	<b>99</b>
4.1	Εισαγωγή .....	101
4.2	Χρησιμοποιηθέν προσομοίωμα .....	102
4.2.1	Μαθηματική διατύπωση .....	102
4.2.2	Περιορισμοί παραμέτρων .....	104
4.2.3	Παράμετροι $\beta$ και $\gamma$ .....	109
4.2.4	Εκθετική παράμετρος $n$ .....	111
4.2.5	Παράμετρος $\alpha$ .....	112
4.2.6	Σημείο διαρροής $(u_y, F_y)$ .....	112
4.2.7	Ιξώδης απόσβεση .....	113
4.3	Απόκριση και αναλίσκόμενη ενέργεια .....	114
4.3.1	Διατύπωση του προβλήματος .....	114
4.3.2	Επισκόπηση υφιστάμενου ερευνητικού έργου .....	115
4.3.3	Απόκριση .....	115
4.3.4	Αναλίσκόμενη ενέργεια .....	119
4.3.5	Εφαρμογές .....	125
4.3.5.1	Αναλίσκόμενη ενέργεια κατά την διάρκεια πλήρους υστερητικού βρόχου .....	125
4.3.5.2	Προσεγγιστική μέθοδος υπολογισμού και διγραμμικό προσομοίωμα .....	126
4.3.5.3	Ανελαστικές παραμορφώσεις του προσομοιώματος Bouc-Wen .....	128
4.4	Μειονεκτήματα προσομοιώματος .....	131
4.4.1	Διατύπωση του προβλήματος .....	131
4.4.2	Επισκόπηση υφιστάμενου ερευνητικού έργου .....	133
4.4.3	Μειονεκτήματα αρχικού προσομοιώματος .....	134
4.4.3.1	Αύξηση παραμόρφωσης .....	134
4.4.3.2	Μείωση υστερητικής δύναμης .....	135
4.4.3.3	Παραβίαση της αρχής πλαστικότητας του Il'iushin .....	136
4.5	Τροποποιημένο προσομοίωμα .....	138



4.5.1	Επισκόπηση υφιστάμενου ερευνητικού έργου .....	138
4.5.2	Προτεινόμενη τροποποίηση του προσομοιώματος Bouc-Wen .....	139
4.5.3	Επιλογή σημείων αναστροφής .....	144
4.5.4	Σύγκριση αρχικού και τροποποιημένου προσομοιώματος .....	149
<b>5</b>	<b>Ταυτοποίηση Παραμέτρων.....</b>	<b>155</b>
5.1	Εισαγωγή .....	157
5.2	Ταυτοποίηση συστήματος.....	157
5.3	Διατύπωση του προβλήματος.....	158
5.4	Επισκόπηση μεθόδων ταυτοποίησης .....	160
5.4.1	Γενικά .....	160
5.4.2	Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων .....	160
5.4.3	Μέθοδος μέγιστης πιθανότητας (maximum likelihood method).....	161
5.4.4	Extended Kalman Filter (EKF).....	161
5.4.5	Αλγόριθμος Levenberg – Marquardt (LM) .....	162
5.4.6	Κλασικός Γενετικός Αλγόριθμος (Standard-GA).....	162
5.4.7	Μικρο-γενετικός αλγόριθμος (Micro-GA) .....	164
5.4.8	Αλγόριθμος Διαφορικής Εξέλιξης (Differential Evolution).....	165
5.4.9	Βελτιστοποίηση Σμήνους Σωματιδίων (Particle Swarm Optimization) .....	167
5.5	Επισκόπηση υφιστάμενου ερευνητικού έργου .....	169
5.5.1	Γενικά .....	169
5.5.2	Yar και Hammond (1987).....	169
5.5.3	Sues et al. (1988).....	171
5.5.4	Lin και Zhang (1994).....	172
5.5.5	Kunnath et al. (1997).....	173
5.5.6	Ni et al. (1998).....	175
5.5.7	Kyprianou et al. (2001) .....	176
5.5.8	Zhang et al. (2002).....	177
5.5.9	Ha et al. (2005).....	178
5.5.10	Ma et al. (2006) .....	178
5.5.11	Ha et al. (2006).....	179
5.5.12	Charalampakis και Koumoussis (2006).....	179
5.5.13	Ye και Wang (2007).....	182
5.5.14	Kwok et al. (2007).....	183
5.6	Μειονεκτήματα υφιστάμενων μεθόδων .....	183
5.7	Προτεινόμενη νέα μέθοδος .....	184
5.7.1	Αντικειμενική συνάρτηση - Ορισμός προβλήματος βελτιστοποίησης.....	184
5.7.2	Ορισμός προβλήματος βελτιστοποίησης .....	185
5.7.3	Επίλυση εξισώσεων.....	185
5.7.4	Εξελικτικός αλγόριθμος .....	187
5.7.5	Συρρίκνωση του χώρου των λύσεων (Bounding).....	189

5.7.6 Έλεγχος των συντελεστών της μεθόδου ταυτοποίησης.....	191
5.7.7 Συνθήκη τερματισμού.....	193
5.8 Ταυτοποίηση παραμέτρων.....	194
5.8.1 Γενικά.....	194
5.8.2 Σύστημα χωρίς ιξώδη απόσβεση.....	194
5.8.3 Σύστημα με ιξώδη απόσβεση.....	197
5.8.4 Θόρυβος.....	199
5.8.5 Ταυτοποίηση με πραγματικά πειραματικά δεδομένα.....	201
5.8.6 Παραμετρικές μελέτες.....	202
5.8.7 Σύγκριση με Standard-GA και Micro-GA.....	208
5.8.8 Σύγκριση με PSO.....	209
5.8.9 Προτεινόμενες τιμές συντελεστών.....	212
<b>6 Διαξονική Κάμψη με Προσομοιώματα Ινών.....</b>	<b>215</b>
6.1 Εισαγωγή.....	217
6.2 Προσομοιώματα ινών.....	217
6.3 Διατύπωση του προβλήματος.....	218
6.4 Παραδοχές.....	219
6.5 Επισκόπηση υφιστάμενου ερευνητικού έργου.....	220
6.5.1 Γενικά.....	220
6.5.2 Rodriguez και Aristizabal-Ochoa (1999, 2001).....	221
6.5.3 Chen et al. (2001).....	222
6.5.4 Fafitis (2001).....	223
6.5.5 Sfakianakis (2002).....	224
6.5.6 Bonet et al. (2004).....	225
6.5.7 Zupan και Saje (2005).....	226
6.5.8 Sousa και Muniz (2007).....	227
6.5.9 Rosati et al. (2008).....	227
6.5.10 Επιπλέον αναφορές.....	228
6.6 Μειονεκτήματα υφιστάμενων μεθόδων.....	229
6.7 Προτεινόμενη νέα μέθοδος.....	231
6.7.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	231
6.7.2 Μέγιστη αντοχή.....	232
6.7.3 Μέθοδοι υπολογισμού της επιφάνειας αστοχίας.....	233
6.7.4 Παραμορφωμένη κατάσταση.....	235
6.7.5 Ιδιότητες των υλικών.....	237
6.7.6 Περιγραφή τυχαιάς διατομής.....	238
6.7.7 Κατάτμηση πολυγώνων σε καμπυλόγραμμα τραπέζια.....	239
6.7.8 Βασικά επιφανειακά ολοκληρώματα.....	240
6.7.9 Υπολογισμός συνισταμένων δυνάμεων.....	241

6.7.10 Κατασκευή διαγραμμάτων ροπών – καμπυλοτήτων .....	242
6.7.11 Υπολογισμός μέγιστης αντοχής .....	245
6.7.12 Διαγράμματα αλληλεπίδρασης.....	245
6.7.13 Επιφάνεια αστοχίας.....	246
6.7.14 Υπολογισμός παραμορφωμένης κατάστασης .....	246
<b>6.8 Εφαρμογές .....</b>	<b>249</b>
6.8.1 Διαγράμματα αλληλεπίδρασης ορθογωνικής διατομής.....	249
6.8.2 Διαγράμματα αλληλεπίδρασης μη συμμετρικής διατομής.....	251
6.8.3 Πλεονεκτήματα της προτεινόμενης μεθόδου – παραμετρική μελέτη.....	253
6.8.4 Ανάλυση σύμμικτης διατομής με πολλαπλά επίπεδα περίσφιξης .....	256
6.8.5 Ταυτοποίηση παραμέτρων προσομοιώματος Bouc-Wen .....	259
<b>7 Εφαρμογές.....</b>	<b>261</b>
7.1 Εισαγωγή .....	263
7.2 Plastique .....	263
7.2.1 Τύποι ανάλυσης.....	263
7.2.2 Προσομοίωση δομικών στοιχείων .....	263
7.2.3 Στοιχείο δοκού .....	263
7.2.4 Στοιχείο υποστηλώματος.....	264
7.2.5 Στοιχείο τοιχώματος.....	265
7.2.6 Διανεμημένη πλαστικότητα .....	267
7.2.7 Διείσδυση της πλαστικοποίησης .....	268
7.2.8 Ανάλυση .....	268
7.2.9 Επαναληπτική διαδικασία.....	269
7.2.10 Προσομοίωμα Bouc-Wen .....	270
7.2.11 Μείωση της αντοχής και της δυσκαμψίας.....	271
7.2.12 Στένωση του διαγράμματος ροπών - καμπυλοτήτων .....	273
7.2.13 Δείκτης βλάβης.....	274
7.3 Εφαρμογή .....	274
7.3.1 Ημιτονοειδής φόρτιση.....	282
7.3.2 Northridge Tarzana Cedar Hill 090 [84] .....	284
<b>8 Λογισμικό .....</b>	<b>289</b>
8.1 mySpec .....	291
8.2 myBWDE.....	291
8.3 myBWMod.....	294
8.4 myBWID .....	295
8.5 myBWIDPSO.....	295
8.6 myBiaxial.....	296
<b>9 Συμπεράσματα .....</b>	<b>299</b>

9.1	Εισαγωγή.....	301
9.2	Υστέρηση .....	301
9.3	Υστερητικά προσομοιώματα τύπου Bouc-Wen.....	301
9.4	Υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen .....	302
9.5	Ταυτοποίηση παραμέτρων.....	310
9.6	Διαξονική κάμψη με προσομοιώματα ινών .....	314
9.7	Εφαρμογές.....	316
<b>10</b>	<b>Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα .....</b>	<b>319</b>
<b>11</b>	<b>Παράρτημα .....</b>	<b>323</b>
<b>12</b>	<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>337</b>
<b>13</b>	<b>Ευρετήριο .....</b>	<b>359</b>

## Ευρετήριο Πινάκων

Πίνακας 3.6.1: Παράμετροι προσομοιώματος .....	83
Πίνακας 4.3.1: Τιμές πρόσχημων και πεδία ορισμού υστερητικής παραμέτρου z.....	118
Πίνακας 4.3.2: Παράμετρος $k_{DA}^*$ για διάφορες τιμές του n (πλήρης διαρροή).....	124
Πίνακας 4.5.1: Καταγραφές σεισμικών διεγέρσεων από PEER [84] .....	151
Πίνακας 5.5.1: Παράμετροι προσομοιώματος χωρίς περιορισμούς (πραγματικές και ταυτοποιημένες τιμές).....	180
Πίνακας 5.5.2: Παράμετροι προσομοιώματος με περιορισμούς (πραγματικές και ταυτοποιημένες τιμές).....	181
Πίνακας 5.8.1: Πραγματικές και ταυτοποιημένες τιμές παραμέτρων χωρίς ιξώδη απόσβεση.....	195
Πίνακας 5.8.2: Πραγματικές και ταυτοποιημένες τιμές παραμέτρων με ιξώδη απόσβεση....	198
Πίνακας 5.8.3: Ταυτοποιημένες τιμές παραμέτρων (δεδομένα με θόρυβο).....	200
Πίνακας 5.8.4: Αρχικοί πλευρικοί περιορισμοί και ταυτοποιημένες τιμές (πραγματικά δεδομένα).....	202
Πίνακας 5.8.5: Διαμόρφωση υβριδικού εξελικτικού αλγορίθμου .....	206
Πίνακας 5.8.6: Διαμόρφωση μηχανισμού συρρίκνωσης του χώρου των λύσεων .....	206
Πίνακας 7.3.1: Ιδιότητες μελών τριώροφου πλαισίου .....	276
Πίνακας 7.3.2: Ταυτοποιημένες τιμές παραμέτρων προσομοιώματος Bouc-Wen .....	281
Πίνακας 7.3.3: Διαδοχή διαρρών μελών αρχικού προσομοιώματος Bouc-Wen.....	284
Πίνακας 7.3.4: Διαδοχή διαρρών μελών τροποποιημένου προσομοιώματος Bouc-Wen ....	284

[ΚΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ]

## Ευρετήριο Εικόνων

Εικόνα 2.3.1: Τελεστής υστέρησης: (α) Συνάρτηση εισόδου $u(t)$ (β) "φίλτρο" ( $\gamma$ ) συνάρτηση εξόδου $w(t)$ (δ) υστερητικό διάγραμμα.....	43
Εικόνα 2.3.2: Η συνθήκη αιτιότητας: (α) Δύο συναρτήσεις εισόδου με διαφορετική εξέλιξη για $t > t'$ (β) συναρτήσεις εξόδου ( $\gamma$ ) υστερητικά διαγράμματα.....	46
Εικόνα 2.3.3: Καμπύλες μελλοντικής απόκρισης υστερητικού τελεστή (α) με τοπική μνήμη (β) με μη-τοπική μνήμη.....	46
Εικόνα 2.3.4: Η συνθήκη της ανεξαρτησίας από την ταχύτητα (α) αρχική και μετασχηματισμένη χρονοϊστορία εισόδου (β) αντίστοιχες χρονοϊστορίες εξόδου ( $\gamma$ ) κοινό υστερητικό διάγραμμα .....	48
Εικόνα 2.3.5: Διαφορετικές συναρτήσεις εισόδου με την ίδια διαδοχή τοπικών ακρότατων..	49
Εικόνα 2.4.1: Προσομοίωμα Preisach: (α) Απλός υστερητικός τελεστής (β) σχηματική αναπαράσταση προσομοιώματος.....	53
Εικόνα 2.5.1: Ποιοτική αναπαράσταση φαινομένων: (α) απλός υστερητικός βρόχος (β) στένωση ( $\gamma$ ) μείωση της αντοχής (δ) μείωση της δυσκαμψίας .....	55
Εικόνα 3.6.1: Βασική μορφή του υστερητικού προσομοιώματος Sivaselvan – Reinhorn [46]	78
Εικόνα 3.6.2: Μείωση δυσκαμψίας σύμφωνα με τον κανόνα του σημείου περιστροφής.....	81
Εικόνα 3.6.3: (α) Κανονική φόρτιση (β) ανάστροφη φόρτιση .....	83
Εικόνα 3.6.4: Απόκριση προσομοιώματος σε (α) κανονική φόρτιση (β) ανάστροφη φόρτιση	84
Εικόνα 3.6.5: Απόκριση διορθωμένου προσομοιώματος με $\alpha_2=0.0$ σε (α) κανονική φόρτιση (β) ανάστροφη φόρτιση.....	86
Εικόνα 3.6.6: Απόκριση διορθωμένου προσομοιώματος σε ανάστροφη φόρτιση.....	87
Εικόνα 3.6.7: Απόκριση διορθωμένου προσομοιώματος στην κανονική φόρτιση με $\alpha_2=0.0$ και (α) $\alpha_1=10.0$ , (β) $\alpha_1=4.0$ .....	87
Εικόνα 3.6.8: Απόκριση με μείωση της ροπής αντοχής με (α) $\beta_{m1}=10^{-7}$ (β) $\beta_{m1}=10^{-6}$ .....	92
Εικόνα 3.6.9: Προσθήκη ελατηρίου στένωσης στο προσομοίωμα Sivaselvan–Reinhorn [46]	93
Εικόνα 3.6.10: Απόκριση με στένωση με (α) $R_s=0.25$ , $\sigma=0.05$ , $\lambda=0.00$ (β) $R_s=0.40$ , $\sigma=0.05$ , $\lambda=0.00$ ( $\gamma$ ) $R_s=0.30$ , $\sigma=0.05$ , $\lambda=0.00$ (δ) $R_s=0.30$ , $\sigma=0.20$ , $\lambda=0.00$ (ε) $R_s=0.30$ , $\sigma=0.15$ , $\lambda=0.00$ (στ) $R_s=0.30$ , $\sigma=0.15$ , $\lambda=0.25$ .....	96
Εικόνα 3.6.11: Προσθήκη ελατηρίου κράτυνσης στο προσομοίωμα Sivaselvan – Reinhorn [46].....	97
Εικόνα 4.2.1: Μονοβάθμιο προσομοίωμα Bouc-Wen.....	104
Εικόνα 4.2.2: Υστερητικός βρόχος ( $\beta=-0.75$ , $\gamma=0.25$ , $\alpha=0.10$ , $n=1$ , $u_{max}/u_y=2$ ) .....	106
Εικόνα 4.2.3: Υστερητικός βρόχος ( $\beta=-0.25$ , $\gamma=0.75$ , $\alpha=0.10$ , $n=1$ , $u_{max}/u_y=5$ ) .....	108
Εικόνα 4.2.4: Προσομοίωμα Bouc-Wen με παραμορφωσιακή κράτυνση.....	109
Εικόνα 4.2.5: Υστερητικός βρόχος ( $\beta=0.1$ , $\gamma=0.9$ , $\alpha=0.10$ , $n=2$ , $u_{max}/u_y=5$ ) .....	110
Εικόνα 4.2.6: Υστερητικός βρόχος ( $\beta=0.9$ , $\gamma=0.1$ , $\alpha=0.10$ , $n=2$ , $u_{max}/u_y=5$ ) .....	110

Εικόνα 4.2.7: Υστερητικός βρόχος ( $\beta=\gamma=0.5$ , $\alpha=0.10$ , $n=2$ , $u_{\max}/u_y=5$ ) .....	111
Εικόνα 4.2.8: Επίδραση εκθετικής παραμέτρου $n$ ( $\beta=\gamma=0.5$ , $\alpha=0.10$ , $u_{\max}/u_y=5$ ) .....	111
Εικόνα 4.2.9: Επίδραση παραμέτρου $\alpha$ ( $\beta=\gamma=0.5$ , $n=2$ , $u_{\max}/u_y=5$ ) .....	112
Εικόνα 4.2.10: Απόκριση σε μονοτονική φόρτιση ( $\alpha$ ) συνολική ( $\beta$ ) υστερητικού ελατηρίου	113
Εικόνα 4.2.11: Προσομοίωμα Bouc-Wen με παράλληλη σύνδεση ιξώδους αποσβεστήρα....	114
Εικόνα 4.3.1: Απόκριση προσομοιώματος Bouc-Wen υπό συμμετρική ανακυκλιζόμενη φόρτιση .....	116
Εικόνα 4.3.2: Απόκριση υστερητικού ελατηρίου υπό συμμετρική ανακυκλιζόμενη φόρτιση	120
Εικόνα 4.3.3: (α) $k_{CD}^*$ ως συνάρτηση των $n$ , $\gamma$ (β) $k_{DA}^*$ ως συνάρτηση του $n$ (πλήρης διαρροή) .....	123
Εικόνα 4.3.4: Αναλισκόμενη ενέργεια ως συνάρτηση της μέγιστης μετατόπισης ( $\beta=0.1$ , $\gamma=0.9$ ) .....	126
Εικόνα 4.3.5: Σχετικό λάθος (%) στον υπολογισμό της αναλισκόμενης ενέργειας .....	127
Εικόνα 4.3.6: Υποθετικός κλειστός κύκλος φόρτισης χωρίς ανελαστικές παραμορφώσεις...	128
Εικόνα 4.3.7: Υπολογισμός ανελαστικών παραμορφώσεων προσομοιώματος Bouc-Wen ....	129
Εικόνα 4.4.1: Απόκριση υστερητικού ελατηρίου προσομοιώματος Bouc-Wen (α) Αύξηση παραμόρφωσης κατά τον κύκλο μεταξύ δύο δοθέντων δυνάμεων (β) Μείωση δύναμης κατά τον κύκλο μεταξύ δύο δοθέντων μετατοπίσεων και παραβίαση της αρχής του Ιλ'ιushin. ....	132
Εικόνα 4.4.2: Παραγόμενο έργο (α) από εξωτερική φόρτιση κατά έναν κλειστό κύκλο τάσης (διαδρομή ABD) και (β) κατά έναν κλειστό κύκλο παραμόρφωσης (διαδρομή ABC). ....	133
Εικόνα 4.4.3: Αναλισκόμενη ενέργεια κατά την διαδρομή ABC.....	137
Εικόνα 4.5.1: Ορισμός συντελεστή αύξησης δυσκαμψίας $R_s$ .....	140
Εικόνα 4.5.2: Αύξηση δυσκαμψίας στον χώρο $u-z$ : αρχικό προσομοίωμα (αριστερά), τροποποιημένο (δεξιά) ( $n=2$ , $\gamma=0.9$ , $\beta=0.1$ , $u_p^+=1.5u_y$ , $z_p^+\approx 0.905$ , $p=2$ ). ....	143
Εικόνα 4.5.3: Καμπύλες ίσης τιμής συντελεστή $R_s$ στον χώρο $u-z$ : $\gamma=0.9$ , $\beta=0.1$ , $u_p^+=1.5u_y$ , $z_p^+=0.905$ και (α) $p=1.0$ (β) $p=2.0$ .....	144
Εικόνα 4.5.4: Απόκριση για την σεισμική διέγερση Northridge TAR090 [84] με χρήση του πλέον πρόσφατου σημείου αναστροφής.....	146
Εικόνα 4.5.5: Απόκριση για την σεισμική διέγερση Northridge TAR090 [84] με χρήση του σημείου αναστροφής που αντιστοιχεί σε μέγιστη μετατόπιση.....	146
Εικόνα 4.5.6: «Ενεργή» περιοχή σημείου αναστροφής $P^+$ .....	148
Εικόνα 4.5.7: Απόκριση για την σεισμική διέγερση Northridge TAR090 [84] με χρήση πολλαπλών σημείων αναστροφής.....	148
Εικόνα 4.5.8: Καμπύλες μελλοντικής απόκριση (α) αρχικό προσομοίωμα με τοπική μνήμη (β) τροποποιημένο προσομοίωμα με μη-τοπική μνήμη .....	150
Εικόνα 4.5.9: Σχετική διαφορά μέγιστης μετατόπισης.....	152
Εικόνα 4.5.10: Σχετική διαφορά μέγιστης υστερητικής ενέργειας.....	152
Εικόνα 5.4.1: Παράδειγμα δισδιάστατης αντικειμενικής συνάρτησης και δημιουργία διανύσματος $u_{i,G+1}$ [97] .....	167



Εικόνα 5.5.1: Απόκριση πραγματικού και ταυτοποιημένου συστήματος υπό (α) την σεισμική διέγερση του El Centro (β) απλή ημιτονοειδή φόρτιση με $F_{max}=10$ kN και $T=25$ s .....	181
Εικόνα 5.7.1: Εξέλιξη πληθυσμού Γενετικού Αλγορίθμου SawTooth.....	188
Εικόνα 5.7.2: Έλεγχος (α) φθίνοντα (β) αύξοντα συντελεστή εξελικτικού αλγορίθμου .....	193
Εικόνα 5.8.1: Πειράματα επιβαλλόμενης αρμονικής μετατόπισης.....	195
Εικόνα 5.8.2: Σχετική απόδοση προτεινόμενης μεθόδου χωρίς ιξώδη απόσβεση.....	196
Εικόνα 5.8.3: Σχετική απόδοση προτεινόμενης μεθόδου με ιξώδη απόσβεση.....	199
Εικόνα 5.8.4: Συρρίκνωση χώρου λύσεων παραμέτρου $\gamma$ (δεδομένα με θόρυβο).....	200
Εικόνα 5.8.5: Ταυτοποίηση με χρήση πραγματικών πειραματικών δεδομένων .....	201
Εικόνα 5.8.6: Παραμετρικές μελέτες προτεινόμενης μεθόδου ταυτοποίησης.....	207
Εικόνα 5.8.7: Σύγκριση προτεινόμενης μεθόδου με Standard-GA και Micro-GA.....	209
Εικόνα 5.8.8: Σύγκριση προτεινόμενης μεθόδου με τον αλγόριθμο PSO.....	212
Εικόνα 6.2.1: Ανάλυση μέλους σε τμήματα και διατομών ελέγχου σε ίνες [150].....	218
Εικόνα 6.5.1: Ανάλυση τυχαίας διατομής κατά Rodriguez και Aristizabal-Ochoa [156].....	221
Εικόνα 6.5.2: Ανάλυση τυχαίας διατομής κατά Chen et al. [149].....	222
Εικόνα 6.5.3: Ανάλυση τυχαίας διατομής κατά Fafitis [153].....	223
Εικόνα 6.5.4: Σχεδίαση τυχαίας διατομής κατά Sfakianakis [159].....	225
Εικόνα 6.5.5: Ανάλυση διατομής σε στρώσεις κατά Bonet et al. [146].....	226
Εικόνα 6.5.6: Ανάλυση διατομής κατά Sousa και Muniz [162].....	227
Εικόνα 6.5.7: Ανάλυση διατομής κατά Rosati et al. [165].....	228
Εικόνα 6.7.1: Τυχαία διατομή υπό εξέταση .....	231
Εικόνα 6.7.2: Μέθοδοι υπολογισμού της επιφάνειας αστοχίας.....	234
Εικόνα 6.7.3: Καθορισμός παραμορφωμένης κατάστασης.....	236
Εικόνα 6.7.4: Παράδειγμα σχέσης τάσης – παραμόρφωσης (α) σκυροδέματος (β) χάλυβα	237
Εικόνα 6.7.5: Παράδειγμα ιεραρχικής ανάλυσης πολυγώνων τυχαίας διατομής.....	238
Εικόνα 6.7.6: Παράδειγμα κατάτμησης διατομής χάλυβα σε καμπυλόγραμμα τραπέζια.....	240
Εικόνα 6.7.7: Διαγράμματα ροπών – καμπυλοτήτων και μέγιστη αντοχή .....	243
Εικόνα 6.7.8: Διάγραμμα ροής: κατασκευή διαγράμματος ροπών - καμπυλοτήτων .....	244
Εικόνα 6.7.9: Υπολογισμός παραμορφωμένης κατάστασης διατομής υπό δεδομένα εξωτερικά φορτία.....	247
Εικόνα 6.7.10: Διάγραμμα ροής: υπολογισμός παραμορφωμένης κατάστασης.....	248
Εικόνα 6.8.1: (α) ορθογωνική διατομή υπό εξέταση (β) διαγράμματα αλληλεπίδρασης σύμφωνα με EC 2.....	250
Εικόνα 6.8.2: Μη συμμετρική διατομή [149] (διαστάσεις σε mm).....	252
Εικόνα 6.8.3: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης για $N_x=-4120$ kN.....	252
Εικόνα 6.8.4: Πλήρης επιφάνεια αστοχίας .....	253

Εικόνα 6.8.5: Διατομή που αναλύθηκε από τους Rodriguez και Aristizabal-Ochoa [156].....	254
Εικόνα 6.8.6: Σχετικό λάθος καμπτικής αντοχής σε συνάρτηση με το πλήθος των κόμβων	255
Εικόνα 6.8.7: Σχετικό λάθος καμπτικής αντοχής λόγω χρήσης αδιάστατων ινών .....	255
Εικόνα 6.8.8: Διατομές σύμμικτων υποστηλωμάτων κατά Chen και Lin [148] .....	256
Εικόνα 6.8.9: Δοκίμιο SRC2 (διαστάσεις σε mm) .....	257
Εικόνα 6.8.10: Απόκριση δοκιμίου SRC2 σε αξονική φόρτιση .....	258
Εικόνα 6.8.11: Διαγράμματα αλληλεπίδρασης δοκιμίου SRC2 .....	259
Εικόνα 7.2.1: Τυπικό στοιχείο δοκού του Plastique .....	264
Εικόνα 7.2.2: Τυπικό στοιχείο υποστηλώματος του Plastique .....	265
Εικόνα 7.2.3: Προσομοίωση τοιχώματος στο Plastique .....	266
Εικόνα 7.2.4: Τυπικό στοιχείο τοιχώματος του Plastique.....	266
Εικόνα 7.2.5: Κατανομή ροπής και καμπυλότητας κατά μήκος του στοιχείου .....	267
Εικόνα 7.2.6: Μήκη διείδυσης της πλαστικοποίησης .....	268
Εικόνα 7.3.1: Τρισδιάστατος φορέας (διαστάσεις σε mm).....	275
Εικόνα 7.3.2: Βασικός δισδιάστατος φορέας – τρίστηλο τριώροφο πλαίσιο (διαστάσεις σε mm) .....	276
Εικόνα 7.3.3: Διατομή υποστηλωμάτων C1 και C7 (διαστάσεις σε mm).....	277
Εικόνα 7.3.4: Διατομή υποστηλώματος C4 (διαστάσεις σε mm).....	277
Εικόνα 7.3.5: Διατομή υποστηλωμάτων C2 και C8 (διαστάσεις σε mm).....	278
Εικόνα 7.3.6: Διατομή υποστηλώματος C5 (διαστάσεις σε mm).....	278
Εικόνα 7.3.7: Διατομή υποστηλωμάτων C3, C6 και C9 (διαστάσεις σε mm).....	279
Εικόνα 7.3.8: Διατομή δοκών B1, B3 και B5 (διαστάσεις σε mm).....	279
Εικόνα 7.3.9: Διατομή δοκών B2, B4 και B6 (διαστάσεις σε mm).....	280
Εικόνα 7.3.10: Ταυτοποίηση παραμέτρων προσομοιώματος Bouc-Wen για μονοτονική φόρτιση .....	281
Εικόνα 7.3.11: Απόκριση τρισδιάστατου τριώροφου πλαισίου, ημιτονοειδής φόρτιση.....	282
Εικόνα 7.3.12: Απόκριση τρισδιάστατου τριώροφου πλαισίου, Σεισμός: Northridge TAR090 [84] .....	285
Εικόνα 7.3.13: Συνολική απόκριση τρισδιάστατου τριώροφου πλαισίου, Σεισμός: Northridge TAR090.....	288
Εικόνα 8.1.1: Πρόγραμμα mySpec .....	291
Εικόνα 8.2.1: Πρόγραμμα myBWDE .....	292
Εικόνα 8.3.1: Πρόγραμμα myBWMod .....	294
Εικόνα 8.4.1: Πρόγραμμα myBWID.....	295
Εικόνα 8.5.1: Πρόγραμμα myBWIDPSO.....	296
Εικόνα 8.6.1: Πρόγραμμα myBiaxial.....	297

Εικόνα 8.6.2: Ιδιότητες καμπυλόγραμμων πολυγώνων .....	298
Εικόνα 8.6.3: Ταυτοποίηση παραμέτρων προσομοιώματος Bouc-Wen με βάση τα παραγόμενα διάγραμμα ροπών – καμπυλοτήτων και χρήση Γενετικών Αλγορίθμων .....	298

[ΚΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ]

## Περίληψη

### **Ανελαστική Δυναμική Ανάλυση Φορέων με Προσομοίωση κατά Bouc-Wen Διδακτορική Διατριβή του Αριστοτέλη Ε. Χαραλαμπάκη**

Η παρούσα διατριβή αντιμετωπίζει ορισμένα θεωρητικά και εφαρμοσμένα προβλήματα τα οποία αφορούν το υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen και την χρήση του για την ανελαστική δυναμική ανάλυση φορέων. Με αφετηρία τον ορισμό της υστέρησης και την συνθήκη ανεξαρτησίας της απόκρισης από την ταχύτητα, γίνεται επανεξέταση του προσομοιώματος Bouc-Wen από μαθηματικής άποψης. Παράγονται νέες αναλυτικές σχέσεις υπολογισμού τόσο της υστερητικής απόκρισης όσο και της αναλίσκόμενης ενέργειας, οι οποίες βασίζονται στην υπεργεωμετρική συνάρτηση του Gauss. Οι σχέσεις αυτές αποτελούν τη βάση ενός νέου τροποποιημένου προσομοιώματος, το οποίο αντιμετωπίζει πλήρως ένα από δεκαετίες εντοπισμένο, σημαντικό μειονέκτημα του αρχικού προσομοιώματος. Αυτό αφορά την τοπική παραβίαση των αρχών της πλαστικότητας του Drucker και του Il'iushin, η οποία οδηγεί σε μη φυσική συμπεριφορά κατά την διάρκεια σύντομων κύκλων φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης. Το τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc-Wen αποτελεί το κεντρικό θέμα της διατριβής. Κατ' αρχήν, παρουσιάζονται αναλυτικές σχέσεις οι οποίες ποσοτικοποιούν το εύρος των παραβιάσεων και της μη φυσικής συμπεριφοράς. Στην συνέχεια, προτείνεται μια τροποποίηση η οποία εξαλείφει το προαναφερθέν πρόβλημα, ενώ αποδεικνύεται ότι οι διαφορές στην απόκριση μεταξύ αρχικού και τροποποιημένου προσομοιώματος μπορεί να είναι σημαντικές στην περίπτωση σεισμικής διέγερσης. Με κατεύθυνση την εφαρμογή, αντιμετωπίζεται το θέμα της ταυτοποίησης των παραμέτρων με βάση διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα. Προτείνεται μια νέα μέθοδος ταυτοποίησης των παραμέτρων του υστερητικού προσομοιώματος Bouc-Wen η οποία βασίζεται σε εξελικτικούς αλγορίθμους. Αποδεικνύεται ότι η μέθοδος συνδυάζει πολύ καλή απόδοση και σταθερότητα, ενώ απαντώνται σημαντικά ερωτήματα σχετικά με τον σχεδιασμό των πειραμάτων. Για την αντιμετώπιση της έλλειψης πειραματικών δεδομένων κατά την προσομοίωση των μελών ενός

φορέα, παρουσιάζεται ένας νέος αλγόριθμος ανάλυσης τυχαιών διατομών σε διαξονική κάμψη με αξονική δύναμη, ο οποίος παρέχει την βάση της ανελαστικής - υστερητικής τους συμπεριφοράς κατά Bouc-Wen. Όλες οι προτεινόμενες μέθοδοι αναπτύχθηκαν ανεξάρτητα σε κώδικα Η/Υ και οι περισσότερες ενσωματώθηκαν σε υφιστάμενο κώδικα ανελαστικής στατικής και δυναμικής ανάλυσης «Plastique», ο οποίος έχει αναπτυχθεί στο Εργαστήριο. Τέλος, η επιβεβαίωση της συμβολής όλων των παραπάνω θεωρήσεων γίνεται αριθμητικά μέσω χαρακτηριστικών παραδειγμάτων δυναμικής ανάλυσης.

## **Abstract**

### **Inelastic Dynamic Analysis of Structures using Bouc-Wen Hysteretic Models**

**PhD Thesis by Aristotelis E. Charalampakis**

This PhD thesis raises and solves a number of theoretical and practical issues regarding the use of Bouc-Wen hysteretic models for the inelastic dynamic analysis of structures. Based on the definition of hysteresis and its rate independence, the Bouc-Wen model is re-examined in mathematical terms. New analytical solutions for the hysteretic response and the dissipated energy are derived which are based on Gauss' hypergeometric function. These solutions form the stepping stone of a modified Bouc-Wen model which eliminates a significant problem of the original one, i.e. the local violation of Drucker's and Il'iusin's postulates of plasticity. This problem is known for decades and results in nonphysical behavior of the model in case of small amplitude reversals. The modified model is the most important contribution of the thesis. First, the extent of the nonphysical behavior is analyzed and quantified. Then, a modification of the original model is proposed which results in the correction of its aforementioned deficiencies. It is shown that the original and modified model may exhibit significantly different behavior under seismic excitation. In a more practical level, the identification of Bouc-Wen model parameters is examined. A new hybrid evolutionary algorithm is proposed which combines very good performance and stability. In addition, the important issue of experiment design is discussed based on the conclusions of parameter identification. In order to cope with the lack of experimental data, a new generic fiber model algorithm is also proposed which allows for the analysis of arbitrary cross-sections under biaxial bending and axial load. All proposed methods and algorithms were programmed independently in computer code. Most of the code was also included in an existing 3D analysis software called "Plastique", which has been developed by our research group. The validity and significance of the proposed methods is demonstrated through numerical examples.

[ΚΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ]



# 1

## Εισαγωγή



## 1.1 Γενικά

Στην εποχή μας, η επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού έχει αλλάξει ριζικά με την έλευση των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών (Η/Υ). Στο παρελθόν υπήρχαν στενά περιθώρια όσον αφορά το επίπεδο της ανάλυσης το οποίο ήταν ανθρωπίνως εφικτό, ακόμη και στην περίπτωση σημαντικών έργων. Συχνά, η απάντηση σε αυτή την αδυναμία ήταν απλουστευμένα προσομοιώματα και υπερδιαστασιολόγηση. Σήμερα, η ραγδαία εξέλιξη των Η/Υ τόσο σε επίπεδο υλικού (hardware) όσο και σε επίπεδο λογισμικού (software) έχει εκτινάξει την πολυπλοκότητα των προσομοιωμάτων.

Αυτή η έκρηξη δυνατότητας προσομοίωσης κρύβει κινδύνους. Αφ' ενός, η χρήση πολύπλοκων προσομοιωμάτων δίνει την ψευδαίσθηση της «ακρίβειας» και της «ασφάλειας». Αφ' ετέρου, ο Μελετητής Μηχανικός καλείται να γίνει χρήστης κάποιου σύνθετου λογισμικού, ενώ αγνοεί ουσιώδη στοιχεία σχετικά με τα φυσικά προσομοιώματα και τα όριά τους, αλλά και τις δυνατότητες και την ακρίβεια των αλγορίθμων που έχουν ενσωματωθεί. Έτσι, συχνά αδυνατεί να ερμηνεύσει τον μεγάλο όγκο των αποτελεσμάτων ή/και να εφαρμόσει αποτελεσματικά εναλλακτικές μεθόδους για την επιβεβαίωση της εκτίμησης της συμπεριφοράς των φορέων που σχεδιάζει.

Σε αυτό το κομβικό σημείο, πολλοί ερευνητές επανέρχονται σε απλές ιδέες του παρελθόντος και τις επανεξετάζουν με τα νέα εργαλεία που έχουν στην διάθεσή τους. Σκοπός μιας τέτοιας προσέγγισης είναι η όσο το δυνατόν απλούστερη, αλλά ταυτόχρονα ρεαλιστική προσομοίωση πολύπλοκων κατασκευών. Έτσι, ανοίγει ο δρόμος για την μείωση του τεράστιου χάσματος μεταξύ της εμβριθούς θεωρητικής έρευνας και της πλέον εφαρμοσμένης προσέγγισης.

Στο γνωστικό πεδίο της ανελαστικής δυναμικής ανάλυσης, το υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen [1] προσφέρει μια απλή και αποτελεσματική φαινομενολογική προσέγγιση του φαινομένου της υστέρησης, με μεγάλη δυνατότητα προσομοίωσης των υστερητικών βρόχων των περισσότερων υλικών καθώς και των μέσων συνδέσεως τους. Ο όρος φαινομενολογικός

υπονοεί ότι δεν εξετάζεται (και στην πραγματικότητα δεν ενδιαφέρει) ο φυσικός μηχανισμός ο οποίος γεννά την υστέρηση. Αντίθετα, δίνεται έμφαση στο μακροσκοπικό αποτέλεσμα, το οποίο δεν είναι άλλο από την παρατηρούμενη υστερητική συμπεριφορά η οποία κυριαρχεί στα υλικά αυτά.

## **1.2 Αντικείμενο της διατριβής**

Αντικείμενο της διατριβής είναι η αντιμετώπιση μιας σειράς θεωρητικών και πρακτικών θεμάτων τα οποία αφορούν την χρήση του υστερητικού προσομοιώματος Bouc-Wen για την ανελαστική δυναμική ανάλυση φορέων. Τα θέματα αυτά αφορούν:

- Την μαθηματική συνέπεια του προσομοιώματος,
- Την φυσική ερμηνεία των παραμέτρων,
- Τον υπολογισμό της απόκρισης και της αναλυσκόμενης ενέργειας,
- Την αντιμετώπιση εντοπισμένων μειονεκτημάτων του,
- Την ταυτοποίηση των παραμέτρων του, με βάση πραγματικά ή νοητά πειράματα.

Αντικειμενικός σκοπός είναι η ενσωμάτωση των προτεινόμενων μεθοδολογιών σε υφιστάμενο κώδικα στατικής και δυναμικής ανελαστικής ανάλυσης φορέων και η ανάδειξη της αποτελεσματικότητας και της σημασίας τους.

## **1.3 Διάρθρωση και πρωτοτυπία της διατριβής**

Η παρούσα διατριβή αποτελείται από δέκα κεφάλαια, συμπεριλαμβανομένου του παρόντος εισαγωγικού **Κεφαλαίου 1**.

Στο **Κεφάλαιο 2** δίνεται ο ορισμός του φαινομένου της υστέρησης και παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία της μαθηματικής θεωρίας της υστέρησης κατά Krasnosel'skiĭ και Rokronskiĭ, τα οποία αποτελούν τη θεωρητική βάση των προσομοιωμάτων Bouc-Wen. Ιδιαίτερης σημασίας είναι η αναφορά στις ιδιότητες των υστερητικών τελεστών και συγκεκριμένα στη συνθήκη ανεξαρτησίας της απόκρισης από την ταχύτητα. Με βάση αυτή,

γίνεται εφικτή η εύρεση αναλυτικών σχέσεων υπολογισμού της υστερητικής απόκρισης και της αναλίσκόμενης ενέργειας, όπως αναλύεται στο Κεφάλαιο 4.

Στο **Κεφάλαιο 3** παρουσιάζεται μια ανασκόπηση των κυριότερων προσομοιωμάτων τύπου Bouc-Wen. Επισημαίνονται τα βασικά τους χαρακτηριστικά και, όπου κρίνεται απαραίτητο, προτείνονται απλές τροποποιήσεις οι οποίες αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά τις διάφορες αδυναμίες τους. Ενδεικτικό παράδειγμα είναι ο κανόνας απομείωσης της δυσκαμψίας με περιστροφή γύρω από σημείο (pivot rule), ο οποίος αποδεικνύεται ότι λειτουργεί σωστά μόνο στην περίπτωση φόρτισης με αυξανόμενο εύρος μετατόπισης. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, ο κανόνας λειτουργεί λανθασμένα και οδηγεί σε αύξηση της δυσκαμψίας (stiffening), η οποία δεν δικαιολογείται από φυσικής άποψης. Για την αποτελεσματική αντιμετώπιση του προβλήματος, προτείνεται η τροποποίηση του κανόνα μέσω της εισαγωγής μιας νέας παραμέτρου η οποία ελέγχει τον βαθμό αποκατάστασης της δυσκαμψίας.

Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζεται η βασική μορφή του προσομοιώματος Bouc-Wen. Αναλύεται η επίδραση των παραμέτρων στην απόκριση και την μορφή των υστερητικών βρόχων και διερευνώνται οι συνθήκες κάτω από τις οποίες το προσομοίωμα παρουσιάζει συνεπή μηχανική συμπεριφορά.

Στην συνέχεια, γίνεται επανεξέταση του προσομοιώματος από μαθηματικής άποψης. Παρουσιάζονται νέες αναλυτικές σχέσεις τόσο για την υστερητική απόκριση όσο και για την αναλίσκόμενη ενέργεια υπό συμμετρική ανακυκλιζόμενη φόρτιση. Οι σχέσεις βασίζονται στην υπεργεωμετρική συνάρτηση του Gauss [56] και παρέχουν πολλαπλά οφέλη. Επιπλέον, παρουσιάζονται απλές προσεγγιστικές σχέσεις για τον υπολογισμό της αναλίσκόμενης ενέργειας, οι οποίες παρουσιάζουν επαρκή ακρίβεια σε σχέση με την ακριβή λύση. Τέλος, παρουσιάζεται μια παραμετρική μελέτη σχετικά με την αναλίσκόμενη ενέργεια και εξετάζεται το σφάλμα των προσεγγιστικών σχέσεων και του απλού διγραμμικού προσομοιώματος σε σχέση με τις ακριβείς αναλυτικές εξισώσεις.

Στην συνέχεια, παρουσιάζεται μια σειρά από μειονεκτήματα τα οποία χαρακτηρίζουν το προσομοίωμα Bouc-Wen. Αυτά είναι η αύξηση της παραμόρφωσης, η μείωση της υστερητικής δύναμης και το μη κλείσιμο των υστερητικών βρόχων κατά την διάρκεια σύντομων κύκλων φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης. Συνέπεια αυτών είναι η τοπική παραβίαση των αρχών της πλαστικότητας του Drucker και του Il'ushin. Σε ποιοτικό επίπεδο, αυτά τα μειονεκτήματα του προσομοιώματος είναι γνωστά εδώ και δεκαετίες και έχουν αναφερθεί επανειλημμένα στην βιβλιογραφία. Σε ποσοτικό επίπεδο, παρουσιάζονται νέες αναλυτικές σχέσεις οι οποίες ποσοτικοποιούν το εύρος των παραβιάσεων και της μη φυσικής συμπεριφοράς του προσομοιώματος.

Προς αντιμετώπιση των προαναφερθέντων προβλημάτων, προτείνεται μια τροποποίηση του προσομοιώματος Bouc-Wen. Το τροποποιημένο προσομοίωμα αποτελεί την κύρια πρωτοτυπία της διατριβής και βασίζεται στην εισαγωγή ενός κατάλληλου συντελεστή αύξησης της δυσκαμψίας στην μη γραμμική διαφορική εξίσωση. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται εφικτή η διάκριση μεταξύ πρώτης φόρτισης και επαναφόρτισης, χαρακτηριστικό το οποίο απουσιάζει από το αρχικό προσομοίωμα. Η όλη διαδικασία ελέγχεται με βάση κατάλληλα επιλεγμένα σημεία αναστροφής. Αποδεικνύεται ότι η προτεινόμενη τροποποίηση διορθώνει πλήρως την μη φυσική συμπεριφορά του προσομοιώματος στην περίπτωση σύντομων κύκλων φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης χωρίς να επηρεάζει την απόκριση σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Έτσι, ανασκευάζεται η από καιρό παγιωμένη άποψη ότι «όταν χρησιμοποιούνται ενδοχρονικά προσομοιώματα, τοπικές παραβιάσεις της αρχής ευστάθειας του Drucker δεν μπορούν να αποφευχθούν» (“when endochronic models are adopted, local violations of the Drucker's stability postulate cannot be avoided”, προσωπική επικοινωνία μεταξύ F. Casciati και W.D. Iwan [80]). Στην συνέχεια, αποδεικνύεται ότι η απόκριση του αρχικού και του τροποποιημένου προσομοιώματος ενδέχεται να παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στην περίπτωση σεισμικής διέγερσης.

Στο **Κεφάλαιο 5** παρουσιάζεται ένας νέος υβριδικός εξελικτικός αλγόριθμος για την ταυτοποίηση των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen με βάση πειραματικά

δεδομένα. Ο αλγόριθμος ανήκει στην κατηγορία των Μιμητικών Αλγορίθμων (Memetic Algorithms) [142] και αποτελείται από τρία συστατικά μέρη: τον Γενετικό Αλγόριθμο SawTooth, ο οποίος παρουσιάστηκε πρόσφατα [123], τον αλγόριθμο τοπικής βελτιστοποίησης Greedy Ascent Hill Climbing (GAHC) καθώς και μια νέα μέθοδο συρρίκνωσης του χώρου των λύσεων (bounding), η οποία βασίζεται σε στατιστική ανάλυση ενός δείγματος τοπικών βέλτιστων. Εξετάζεται ένα ευρύτατο φάσμα περιπτώσεων, το οποίο περιλαμβάνει την ύπαρξη ή όχι διαφόρων επιπέδων ιξώδους απόσβεσης και θορύβου, όπως επίσης και περιπτώσεις χρήσης δεδομένων τα οποία προέρχονται τόσο από πραγματικά όσο και από νοητά πειράματα. Η προτεινόμενη μέθοδος συγκρίνεται με άλλες καθιερωμένες μεθόδους βελτιστοποίησης (γενετικοί αλγόριθμοι, μικρο-γενετικό αλγόριθμο, αλγόριθμο βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων – PSO) και αποδεικνύεται ότι συνδυάζει πολύ καλή απόδοση και εξαιρετική σταθερότητα. Επιπλέον, παρουσιάζεται μια εκτενής παραμετρική μελέτη της επίδρασης των συντελεστών της μεθόδου, η οποία αναδεικνύει τον μηχανισμό λειτουργίας της. Τέλος, με βάση τα αποτελέσματα των αναλύσεων προκύπτουν σημαντικά συμπεράσματα για τον σχεδιασμό των πειραμάτων, δηλαδή για τον καθορισμό των χαρακτηριστικών των πειραμάτων τα οποία ευνοούν την ταυτοποίηση.

Για την αντιμετώπιση της έλλειψης πειραματικών δεδομένων κατά την προσομοίωση των μελών ενός φορέα, στο **Κεφάλαιο 6** προτείνεται μια νέα μέθοδος ανάλυσης τυχαίων διατομών υπό διαξονική κάμψη και αξονική δύναμη. Η ανάλυση πραγματοποιείται με χρήση προσομοιωμάτων ινών (fiber models) και βασίζεται στην γνωστή υπόθεση Bernoulli-Euler σύμφωνα με την οποία οι διατομές παραμένουν επίπεδες μετά την παραμόρφωση. Η μέθοδος επιτρέπει την κατασκευή διαγραμμάτων ροπών - καμπυλοτήτων, διαγραμμάτων αλληλεπίδρασης, επιφανειών αστοχίας καθώς και τον υπολογισμό της παραμορφωμένης κατάστασης υπό δεδομένα εξωτερικά φορτία. Ο αλγόριθμος είναι εξαιρετικά γενικός και παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με αντίστοιχες μεθόδους της βιβλιογραφίας. Η διατομή του μέλους μπορεί να αποτελείται από πληθώρα υλικών με ενδεχόμενες πολλαπλές επικαλύψεις ή εσωτερικά κενά. Τα περιγράμματα των υλικών περιγράφονται από

καμπυλόγραμμα πολύγωνα, δηλαδή πολύγωνα των οποίων οι ακμές είναι ευθείες γραμμές ή τόξα κύκλου. Οι νόμοι τάσεων – παραμορφώσεων των υλικών αποτελούνται από οποιονδήποτε αριθμό συνεχόμενων κυβικών πολυωνύμων και η ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων γίνεται με αναλυτικές σχέσεις, ακόμη και στην περίπτωση καμπύλων ακμών. Αποδεικνύεται ότι η μέθοδος συνδυάζει καλή απόδοση και εξαιρετική σταθερότητα. Επιπλέον, παρουσιάζονται παραμετρικές μελέτες οι οποίες αναδεικνύουν τα πλεονεκτήματα και τη συμβολή της έναντι των αντίστοιχων μεθόδων της βιβλιογραφίας. Αυτές σχετίζονται με την ακρίβεια προσομοίωσης καμπύλων ακμών με πολυγωνικές γραμμές καθώς και με την χρήση αδιάστατων ινών για μικρά αντικείμενα, όπως είναι κατά κανόνα οι διατομές του διαμήκους οπλισμού. Από τα παραγόμενα διαγράμματα ροπών – καμπυλοτήτων και κατάλληλες μεθόδους βελτιστοποίησης πραγματοποιείται η ταυτοποίηση των βασικών παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen.

Στο **Κεφάλαιο 7** γίνεται εφαρμογή των μεθόδων που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό *Plastique* [177], στο οποίο προστέθηκαν οι κατάλληλες ρουτίνες ώστε να υπάρχει η δυνατότητα χρήσης του τροποποιημένου προσομοιώματος Bouc-Wen. Επιλύθηκε σε δυναμική ανάλυση ένας τρισδιάστατος φορέας ο οποίος περιλαμβάνει δύο όμοια τριώροφα τρίπτυλα πλαίσια ανά διεύθυνση. Αρχικά, κατασκευάστηκαν τα διαγράμματα ροπών – καμπυλοτήτων για τα υποστυλώματα και τις δοκούς με βάση την γεωμετρία, την αξονική δύναμη και τα δεδομένα των υλικών. Στην συνέχεια έγινε ταυτοποίηση των παραμέτρων του προσομοιώματος για κάθε ομάδα διατομής. Τα δεδομένα εισήχθησαν στο τρισδιάστατο προσομοίωμα το οποίο επιλύθηκε για δύο περιπτώσεις φορτίσεων, ήτοι για μια απλή ημιτονοειδή φόρτιση καθώς και για μια σεισμική διέγερση. Από τα αποτελέσματα των αναλύσεων γίνεται φανερό ότι στην περίπτωση της σεισμικής διέγερσης οι διαφορές είναι σαφείς και σημαντικές, ενώ γίνεται έκδηλη και η μη φυσική συμπεριφορά του αρχικού προσομοιώματος.



Στο **Κεφάλαιο 8** παρουσιάζεται συνοπτικά το λογισμικό το οποίο αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Τόσο το λογισμικό όσο και τα αντίστοιχα εγχειρίδια χρήσης είναι διαθέσιμα στο διαδίκτυο.

Στο **Κεφάλαιο 9** συνοψίζονται τα συμπεράσματα και η συμβολή της παρούσας διατριβής, ενώ στο **Κεφάλαιο 10** παρουσιάζονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

[ΚΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ]

**2**

**Υοτέρηση**



## 2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται ο ορισμός της υστέρησης και παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία της μαθηματικής θεωρίας της υστέρησης κατά Krasnosel'skiĭ και Pokrovskiĭ. Τα στοιχεία αυτά αποτελούν τη θεωρητική βάση των προσομοιωμάτων τύπου Bouc-Wen, τα οποία παρουσιάζονται εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο. Τέλος, παρουσιάζεται μια σύντομη ανασκόπηση διαφόρων εμπειρικών και συναφών υστερητικών προσομοιωμάτων τα οποία έχουν παρουσιασθεί κατά καιρούς στην βιβλιογραφία.

## 2.2 Υστέρηση

Ένα σύστημα λέγεται ότι παρουσιάζει *υστερητική συμπεριφορά* όταν η απόκρισή του διαθέτει μνήμη και είναι ανεξάρτητη του ρυθμού επιβολής της διέγερσης. Σύμφωνα με τον Visintin [2]:

$$\text{hysteresis} = \text{rate independent memory effect}$$

Η υστέρηση απαντάται σε πολλά φυσικά φαινόμενα όπως η πλαστικότητα, η τριβή, ο μαγνητισμός, ο ηλεκτρισμός, η υπεραγωγιμότητα κ.α. Πέραν αυτών, η έννοια της υστέρησης χρησιμοποιείται σε διάφορους κλάδους της Επιστήμης, από την Μηχανική και την Χημεία ως την Βιολογία και την Πειραματική Ψυχολογία.

Στην πραγματικότητα, η απόκριση των φυσικών συστημάτων δεν είναι ποτέ πλήρως ανεξάρτητη του ρυθμού επιβολής της διέγερσης. Συνεπώς, η υστέρηση συνυπάρχει με *φαινόμενα ιξώδους φύσης*, των οποίων η ένταση εξαρτάται από τον ρυθμό επιβολής της διέγερσης. Παρ' όλα αυτά, η υστέρηση είναι επικρατέστερη στις περισσότερες περιπτώσεις, ιδιαίτερα όταν η εξέλιξη των φαινομένων είναι αργή [2].

Η υστέρηση ως φαινόμενο έχει επισημανθεί εδώ και περισσότερο από δύο αιώνες. Ο όρος *υστέρηση* φαίνεται ότι πρωτοχρησιμοποιήθηκε το 1882 από τον J. A. Ewing στις πρωτοπόρες μελέτες του για τον μαγνητισμό [3]. Αυτές διεξήχθησαν κατά την διάρκεια παραμονής του στην Ιαπωνία, όπου θήτευσε ως Καθηγητής Μηχανολογίας στο Πανεπιστήμιο

του Τόκιο. Ο όρος οφείλεται στην γωνία φάσης (phase angle) με την οποία η απόκριση ενός συστήματος υστερεί έναντι της φόρτισης [4].

Αρχικά, τα μαθηματικά χρησιμοποιήθηκαν μόνον ως εργαλείο ποσοτικοποίησης του φαινομένου της υστέρησης. Μόνον σχετικά πρόσφατα, ήτοι το 1966, ένας φοιτητής Μηχανικής ονόματι R. Bouc αντιμετώπισε την υστέρηση ως έναν μαθηματικό μετασχηματισμό μεταξύ χώρων συναρτήσεων [5]-[9]. Επιπλέον, την περίοδο 1970-1980, μια μικρή ομάδα Ρώσων μαθηματικών με επικεφαλής τους Krasnosel'skiĭ και Pokrovskiĭ μελέτησαν συστηματικά τους λεγόμενους *υστερητικούς τελεστές* και τις ιδιότητές τους. Τα αποτελέσματα των ερευνών τους συνοψίστηκαν σε μια μονογραφία, η οποία εκδόθηκε το 1983 στα Ρώσικα και μεταφράστηκε το 1989 στα Αγγλικά [10]. Αυτό αποτέλεσε την βάση πολλών μετέπειτα μελετών γενικά πάνω στη υστέρηση, π.χ. Visintin [2], Brokate και Sprekels [11], Mayergoz [12], [13], αλλά και ειδικά πάνω στα προσομοιώματα τύπου Bouc-Wen, π.χ. Erlicher [18].

Με βάση την μαθηματική θεωρία της υστέρησης μπορούν να αναλυθούν οι ιδιότητες ενός πλήθους υστερητικών τελεστών. Αυτοί μπορεί να είναι απλοί, όπως οι τελεστές Play, Stop, Prandtl-Ishlinskiĭ, αλλά και πιο σύνθετοι όπως οι τελεστές Preisach, Weiss, Reuss, Lifshitz, Duhem, Bouc κ.α. [2]. Πέραν αυτών, μπορούν να αναλυθούν και οι λεγόμενες μεταπτώσεις καταστάσεων (phase transitions) λόγω ασυνέχειας μιας φυσικής παραμέτρου, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε ασυνεχή υστερητική συμπεριφορά.

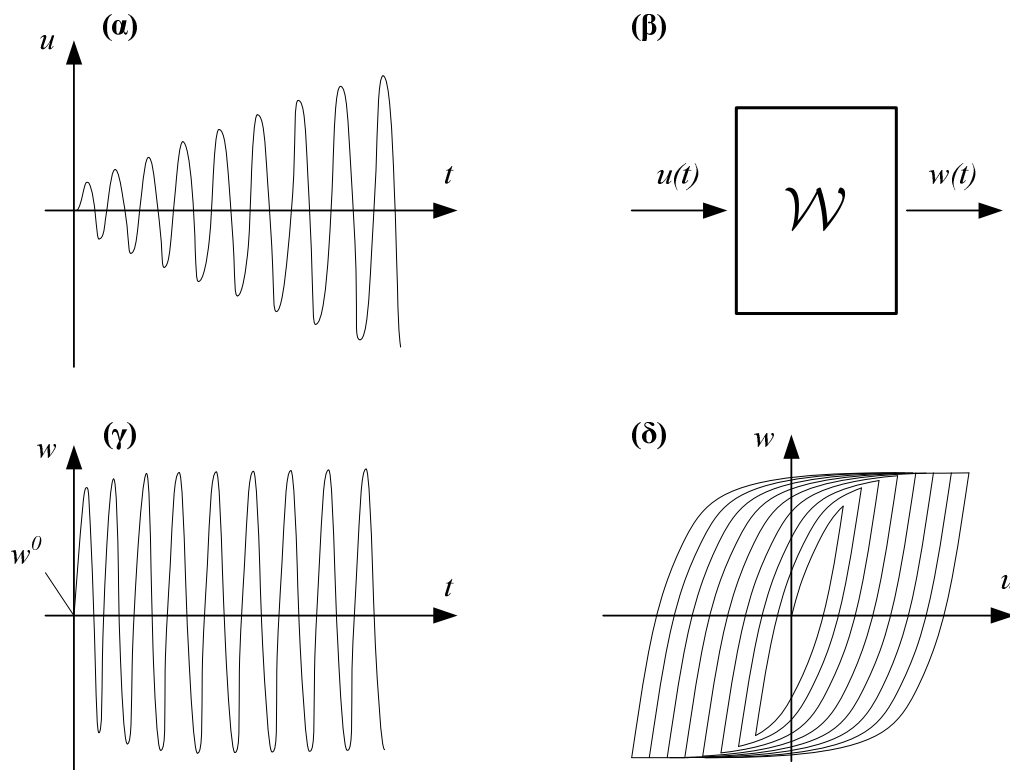
Τα βασικά στοιχεία της μαθηματικής θεωρίας της υστέρησης θα παρουσιαστούν στην συνέχεια.

## **2.3 Μαθηματική θεωρία της υστέρησης**

### **2.3.1 Γενικά**

Πρωταρχική έννοια της μαθηματικής θεωρίας της υστέρησης αποτελεί αυτή του *υστερητικού τελεστή*. Μπορεί κανείς να φανταστεί τον υστερητικό τελεστή σαν ένα «φίλτρο» το οποίο, δεχόμενο ως είσοδο μια συνάρτηση  $u(t)$  παράγει μια συνάρτηση

εξόδου  $w(t)$  (Εικόνα 2.3.1). Στην περίπτωση ενός παραμορφώσιμου σώματος, η συνάρτηση  $u(t)$  θα μπορούσε να ήταν η επιβαλλόμενη τάση και η  $w(t)$  η αντίστοιχη παραμόρφωση. Πρέπει να τονιστεί ότι ο υστερητικός τελεστής δεν είναι παρά μια μαθηματική οντότητα και ως τέτοια, δε φέρει καμία πληροφορία για τα φυσικά αίτια τα οποία προκαλούν την υστέρηση. Είναι λοιπόν σαφές πως ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζεται το φαινόμενο της υστέρησης είναι καθαρά φαινομενολογικός.



**Εικόνα 2.3.1: Τελεστής υστέρησης: (α) Συνάρτηση εισόδου  $u(t)$  (β) "φίλτρο" (γ) συνάρτηση εξόδου  $w(t)$  (δ) υστερητικό διάγραμμα**

Με μαθηματικούς όρους, η λειτουργία του υστερητικού τελεστή περιγράφεται από τη σχέση:

$$w(t) = [\mathcal{W}(u, w^0)](t), t \in (t_0, t_f] \quad (2.3.1)$$

όπου:

- $\mathcal{W}$  ο υστερητικός τελεστής,
- $t$  η τρέχουσα χρονική στιγμή,
- $w^0$  η αρχική συνθήκη της συνάρτησης εξόδου,
- $t_0, t_f$  οι χρονικές στιγμές έναρξης και ολοκλήρωσης του φαινομένου, αντίστοιχα.

Η σχέση (2.3.1) υποδηλώνει πως η τιμή της συνάρτησης  $w$  μπορεί να εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή της συνάρτησης  $u$  κατά την ίδια χρονική στιγμή, αλλά και από την παρελθούσα ιστορία της,  $u(\tau)|_{\tau \in [0,t]}$ . Σε μια τέτοια περίπτωση, ο τελεστής  $\mathcal{W}$  αναφέρεται ως *τελεστής μνήμης* ή *τελεστής Volterra*. Η εξάρτηση της συνάρτησης εξόδου από την αρχική της συνθήκη  $w^0 = w(0)$  δηλώνεται ρητά στον ορισμό (2.3.1), ο οποίος για λόγους πληρότητας μπορεί να πάρει την μορφή:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} : \text{Dom}(\mathcal{W}) \subset C^0([0, t_f]) \times \mathbb{R} &\rightarrow C^0([0, t_f]) \\ u(t) &\rightarrow w(t) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

όπου:

- $\text{Dom}(\mathcal{W})$  το πεδίο ορισμού του τελεστή  $\mathcal{W}$ ,
- $C^0([0, t_f])$  το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο  $[0, t_f]$ ,
- $\mathbb{R}$  το σύνολο των πραγματικών αριθμών,
- $(\times)$  το σύμβολο του καρτεσιανού γινομένου.

Με βάση τον ορισμό (2.3.2), στην παρούσα διατριβή λαμβάνονται υπόψη μόνο συνεχείς συναρτήσεις εισόδου και εξόδου. Αυτές δεν συνιστούν πλήρη χώρο συναρτήσεων όμως καλύπτουν όλες τις εφαρμογές πρακτικού ενδιαφέροντος. Για την επέκταση σε κάποιους πλήρεις χώρους συναρτήσεων, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία των Krasnosel'skiĭ και Pokrovskiĭ [10]. Ο υστερητικός τελεστής  $\mathcal{W}$  θα πρέπει να ικανοποιεί δύο θεμελιώδεις



συνθήκες: τη συνθήκη αιτιότητας και τη συνθήκη ανεξαρτησίας από την ταχύτητα επιβολής της διέγερσης, όπως περιγράφεται στην συνέχεια.

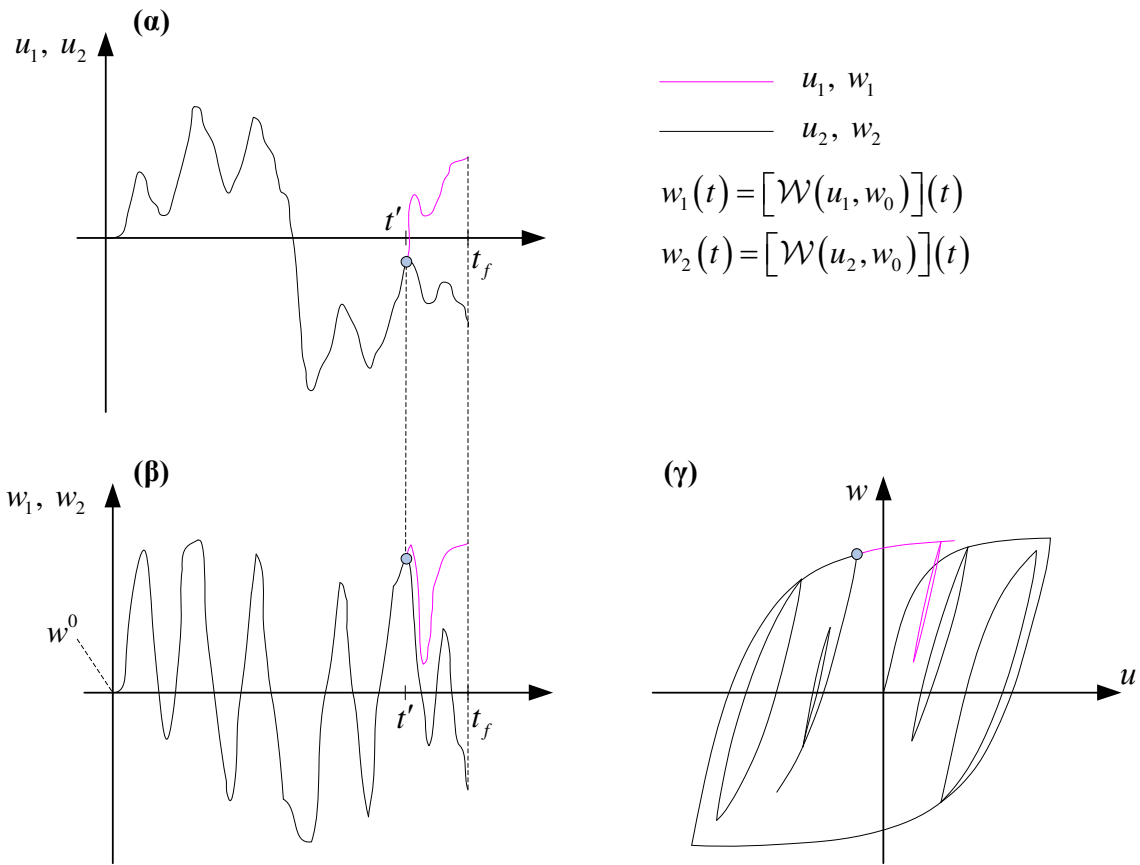
### 2.3.2 Συνθήκη αιτιότητας ή ιδιότητα Volterra

Η συνθήκη αιτιότητας ή ιδιότητα Volterra (causality or Volterra property) αφορά ακριβώς την εξάρτηση της τιμής εξόδου από την όλη χρονοϊστορία της συνάρτησης εισόδου μέχρι την υπόψη χρονική στιγμή. Έστω  $u_1, u_2$  δύο συναρτήσεις εισόδου τέτοιες ώστε:

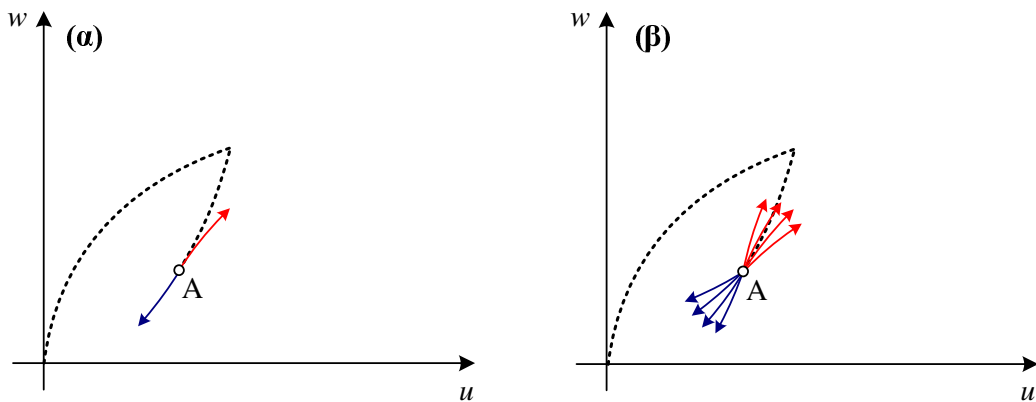
$$\begin{cases} \forall (u_1, w^0), (u_2, w^0) \in \text{Dom}(\mathcal{W}), \forall t \in (0, t_f] \\ \text{if } u_1 = u_2 \text{ in } [0, t_f] \text{ then } [\mathcal{W}(u_1, w^0)](t) = [\mathcal{W}(u_2, w^0)](t) \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Αυτό ουσιαστικά σημαίνει πως δύο δεδομένες χρονοϊστορίες εισόδου, πανομοιότυπες από τη χρονική στιγμή έναρξης μέχρι την τρέχουσα αλλά πιθανόν διαφορετικές στη συνέχεια, θα μας δώσουν μία και μοναδική χρονοϊστορία εξόδου μέσω του τελεστή  $\mathcal{W}$  μέχρι την τρέχουσα χρονική στιγμή. Συνεπώς, η συνάρτηση εξόδου  $w(t)$  εξαρτάται μόνον από τις παρελθούσες τιμές της  $u_1(\tau)|_{\tau \in [0, t]} = u_2(\tau)|_{\tau \in [0, t]}$  και την αρχική συνθήκη  $w^0$  (Εικόνα 2.3.2).

Ο τρόπος με τον οποίο το παρελθόν επηρεάζει το μέλλον μιας απόκρισης χωρίζει τους υστερητικούς τελεστές σε δύο κατηγορίες: τους *Μαρκοβιανούς τελεστές ή τελεστές με τοπική μνήμη* και τους *μη-Μαρκοβιανούς τελεστές ή τελεστές με μη-τοπική μνήμη* [13]. Στους τελεστές με τοπική μνήμη, το παρελθόν επηρεάζει το μέλλον *μόνον μέσω της τρέχουσας τιμής της συνάρτησης εξόδου*. Συνεπώς, σε κάθε εφικτή κατάσταση  $A$  του συστήματος αντιστοιχούν μία ή δύο καμπύλες του υστερητικού διαγράμματος, οι οποίες καθορίζουν το μέλλον της απόκρισης σε περίπτωση αύξησης ή μείωσης της τιμής της συνάρτησης εισόδου (Εικόνα 2.3.3α). Αντίθετα, στην περίπτωση υστερητικών τελεστών με μη-τοπική μνήμη, σε κάθε εφικτή κατάσταση του συστήματος αντιστοιχεί μια *απειρία καμπυλών* οι οποίες καθορίζουν την μελλοντική εξέλιξη (Εικόνα 2.3.3β).



Εικόνα 2.3.2: Η συνθήκη αιτιότητας: (α) Δύο συναρτήσεις εισόδου με διαφορετική εξέλιξη για  $t > t'$  (β) συναρτήσεις εξόδου (γ) υστερητικά διαγράμματα



Εικόνα 2.3.3: Καμπύλες μελλοντικής απόκρισης υστερητικού τελεστή (α) με τοπική μνήμη (β) με μη-τοπική μνήμη

### 2.3.3 Συνθήκη ανεξαρτησίας από την ταχύτητα

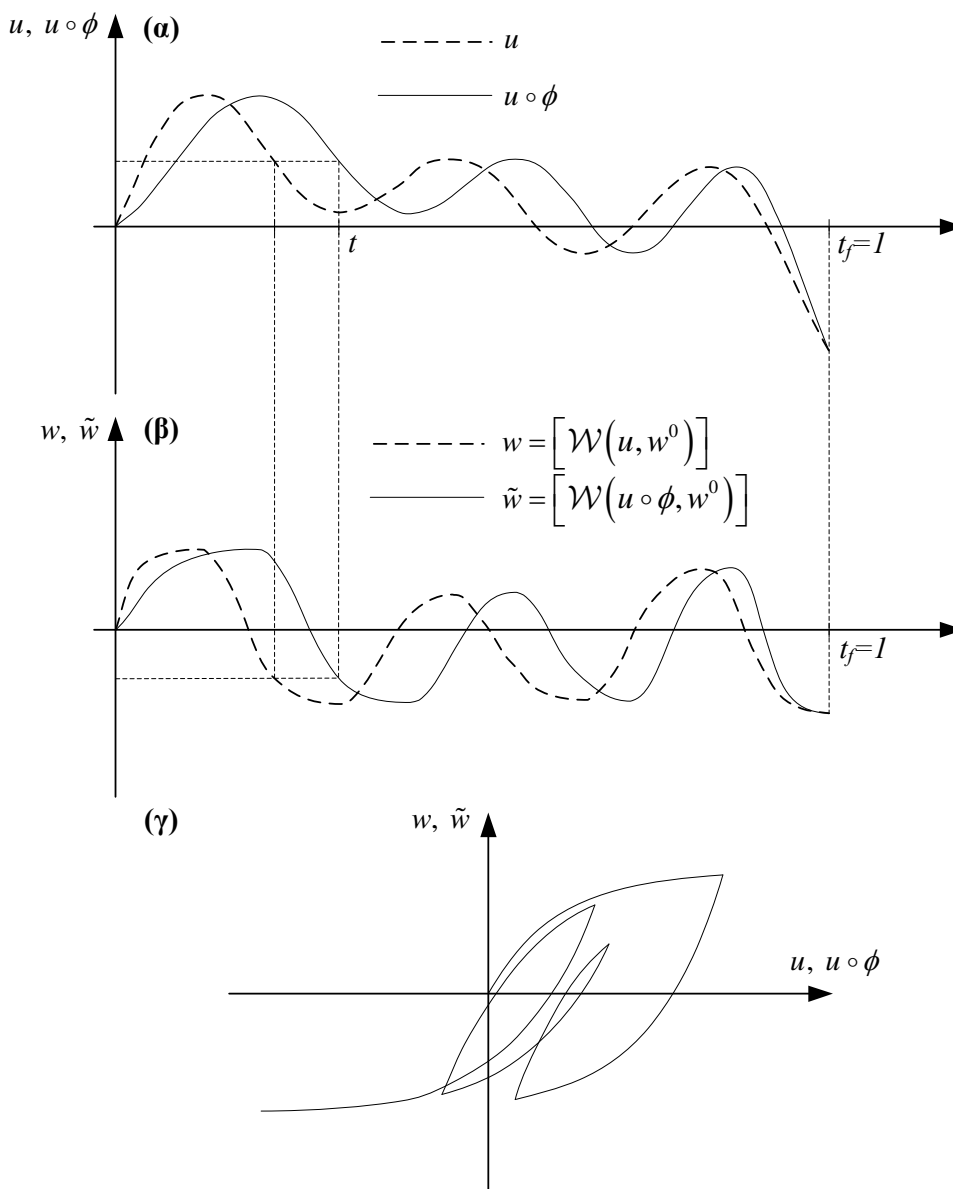
Η συνθήκη ανεξαρτησίας από την ταχύτητα (rate independence) επιτάσσει πως η έξοδος  $w(t)$  είναι ανεξάρτητη από τον ρυθμό επιβολής της εισόδου  $u(t)$ . Με άλλους όρους, το υστερητικό διάγραμμα, δηλαδή το γράφημα της εξόδου  $w(t)$  ως προς την είσοδο  $u(t)$ , είναι *ανεξάρτητο της ταχύτητας με την οποία αυτό διαγράφεται*. Συνεπώς, ο χρόνος μας ενδιαφέρει μόνον ως *δείκτης* της «διεύθυνσης» εξέλιξης του φαινομένου ενώ η *κλίμακα* του χρόνου είναι αδιάφορη.

Η μαθηματική διατύπωση των παραπάνω παίρνει την μορφή:

$$\begin{cases} \forall (u, w^0) \in \text{Dom}(\mathcal{W}), \forall [t_1, t_2] \in (0, t_f] \\ \text{If } \phi: [0, t_f] \rightarrow [0, t_f] \text{ is an admissible transformation,} \\ \text{then } [\mathcal{W}(u \circ \phi, w^0)](t) = [\mathcal{W}(u, w^0)](\phi(t)) \end{cases} \quad (2.3.4)$$

όπου  $\phi: [0, t_f] \rightarrow [0, t_f]$  ένας οποιοσδήποτε αποδεκτός χρονικός μετασχηματισμός. Ως αποδεκτός χρονικός μετασχηματισμός θεωρείται κάθε συνεχής αύξουσα συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες  $\phi(0) = 0$  και  $\phi(t_f) = t_f$ . Στην Εικόνα 2.3.4 παρουσιάζονται δύο χρονοϊστορίες, εκ των οποίων η δεύτερη προκύπτει από την πρώτη εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό  $\phi(t) = t^{1.3}$  για  $t \in [0, 1]$ . Παρατηρείται ότι το προκύπτον υστερητικό διάγραμμα είναι κοινό και για τις δύο περιπτώσεις (Εικόνα 2.3.4γ).

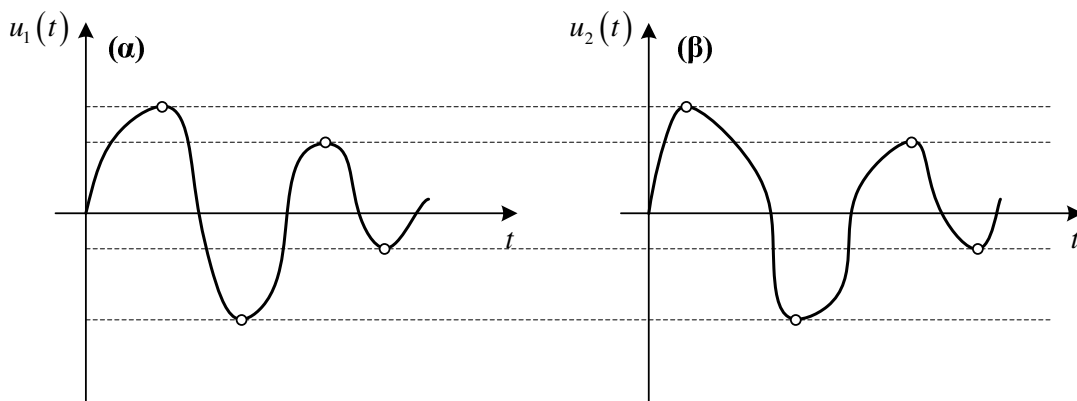
Εναλλακτικά, μπορεί να ειπωθεί ότι οι κλάδοι της υστερητικής απόκρισης εξαρτώνται *μόνον από τα τοπικά ακρότατα της εισόδου  $u(t)$* , ενώ η ταχύτητα (ή γενικότερα, ο τρόπος) με τον οποίο αυτά επιτυγχάνονται δεν επηρεάζει την απόκριση [13]. Στην Εικόνα 2.3.5 φαίνονται δύο διαφορετικές συναρτήσεις εισόδου, οι οποίες παρουσιάζουν την ίδια διαδοχή τοπικών ακρότατων. Λόγω της συνθήκης ανεξαρτησίας από την ταχύτητα, το διάγραμμα υστερητικής απόκρισης θα είναι κοινό.



**Εικόνα 2.3.4: Η συνθήκη της ανεξαρτησίας από την ταχύτητα (α) αρχική και μετασχηματισμένη χρονοϊστορία εισόδου (β) αντίστοιχες χρονοϊστορίες εξόδου (γ) κοινό υστερητικό διάγραμμα**

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι οποιοσδήποτε τελεστής ικανοποιεί τις θεμελιώδεις συνθήκες των §2.3.2 και §2.3.3 θεωρείται εξ' ορισμού υστερητικός. Επιπλέον, είναι σαφές ότι ένας υστερητικός τελεστής δεν μπορεί να λαμβάνει υπόψη φαινόμενα ιξώδους φύσης, τα οποία εξαρτώνται από την ταχύτητα. Αξίζει να σημειωθεί πως κάποιοι ερευνητές, π.χ. Mayergoyz [12], χρησιμοποιούν τον όρο *στατική υστέρηση* για να

περιγράψουν φαινόμενα που έχουν μνήμη και δεν εξαρτώνται από την ταχύτητα. Αντίστοιχα, χρησιμοποιούν τον όρο *δυναμική υστέρηση* για να περιγράψουν φαινόμενα με μνήμη τα οποία όμως εξαρτώνται από την ταχύτητα. Αυτή η ονοματολογία χρησιμοποιείται κυρίως σε θέματα Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και δεν θα υιοθετηθεί στα πλαίσια της παρούσας διατριβής.



**Εικόνα 2.3.5: Διαφορετικές συναρτήσεις εισόδου με την ίδια διαδοχή τοπικών ακρότατων**

Πέραν των προαναφερθέντων, παρουσιάζονται στην συνέχεια μερικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν κατά περίπτωση ορισμένους υστερητικούς τελεστές.

### 2.3.4 Ιδιότητα μονοτονικότητας

Πρόκειται για εγγενή ιδιότητα των υστερητικών τελεστών, η οποία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (u, w^0) \in \text{Dom}(\mathcal{W}), \forall [t_1, t_2] \subset (0, t_f] \\ \text{if } u \text{ is either non-decreasing or non-increasing in } [t_1, t_2], \\ \text{then so is } \mathcal{W}(u, w^0) \end{array} \right. \quad (2.3.5)$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{cases} \text{if } u, \mathcal{W}(u, w^0) \in W^{1,1}(0, t_f), \\ \text{then } \frac{du}{dt} \frac{d}{dt} \mathcal{W}(u, w^0) \geq 0 \text{ always everywhere in } (0, t_f) \end{cases} \quad (2.3.6)$$

όπου  $W^{1,1}(0, t_f)$  ο χώρος Sobolev [49] των συναρτήσεων με απόλυτα ολοκληρώσιμη πρώτη παράγωγο. Πρακτικά οι σχέσεις (2.3.5) και (2.3.6) εξασφαλίζουν πως η κλίση του υστερητικού διαγράμματος είναι πάντοτε μη αρνητική, τόσο στον κλάδο φόρτισης όσο και στον κλάδο αποφόρτισης. Αν σε κάποιο σημείο ορίζονται δύο κλίσεις, τότε πρέπει και οι δύο να είναι μη αρνητικές [50].

### 2.3.5 Ιδιότητα συνέχειας

Η ιδιότητα της συνέχειας μπορεί να διατυπωθεί με μαθηματικούς όρους ως εξής:

$$\begin{cases} \forall \{(u_n, w_n^0) \in Dom(\mathcal{W})\}_{n \in \mathbb{N}} \\ \text{if } u_n \rightarrow u \text{ uniformly in } [0, t_f] \text{ and } w_n^0 \rightarrow w^0 \\ \text{then } \mathcal{W}(u_n, w_n^0) \rightarrow \mathcal{W}(u, w^0) \text{ uniformly in } [0, t_f] \end{cases} \quad (2.3.7)$$

### 2.3.6 Ιδιότητα υποσυνόλου

Αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα των συνεχών υστερητικών τελεστών και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\begin{cases} \forall (u, w^0) \in Dom(\mathcal{W}), \forall [t_1, t_2] \subset (0, t_f] \\ \text{setting } w(t_1) := [\mathcal{W}(u, w^0)](t_1), \text{ then} \\ [\mathcal{W}(u, w^0)](t_2) = [\mathcal{W}(u(t_1 + \cdot), w(t_1))](t_2 - t_1) \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Έστω πως για μία δεδομένη συνάρτηση εισόδου  $u(t)$  υπολογίζεται η έξοδος σε μία ενδιάμεση χρονική στιγμή  $t_1 \rightarrow w(t_1)$  καθώς και στην τελική χρονική στιγμή  $t_2 \rightarrow w(t_2)$ . Η σχέση (2.3.8) δηλώνει πως αν η χρονοϊστορία εισόδου χωρισθεί σε δύο μικρότερες, τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv u, t \in (0, t_1] \\ u_2 &\equiv u, t \in (t_1, t_2] \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

με  $w_2^0 = w(t_1)$ , τότε η έξοδος της  $u_2$  την τελική χρονική στιγμή  $t_2$  θα είναι η ίδια με αυτή της αρχικής ιστορίας:  $w_2(t_2) = w(t_2)$ .

### 2.3.7 Ιδιότητα διατάξεως

Η ιδιότητα διατάξεως μπορεί να διατυπωθεί με μαθηματικούς όρους ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (u_1, w_1^0), (u_2, w_2^0) \in \text{Dom}(\mathcal{W}), \forall t \in (0, t_f] \\ \text{if } u_1 \leq u_2 \text{ in } [0, t] \text{ and } w_1^0 \leq w_2^0 \text{ then} \\ \left[ \mathcal{W}(u_1, w_1^0) \right](t) \leq \left[ \mathcal{W}(u_2, w_2^0) \right](t) \end{array} \right. \quad (2.3.10)$$

Η ιδιότητα (2.3.10) μας δείχνει πως αν υπάρχει σαφής σχέση διάταξης μεταξύ δύο συναρτήσεων εισόδου σε κάποιο διάστημα χρόνου, αυτή διατηρείται αναλλοίωτη στις αντίστοιχες εξόδους υπό την προϋπόθεση η ίδια σχέση διάταξης να διέπει και τις αρχικές τους συνθήκες.

### 2.3.8 Υστερητικοί τελεστές με εσωτερικές μεταβλητές

Κατά την ανάπτυξη των παραπάνω ορισμών έγινε η σιωπηρή παραδοχή πως η εξέλιξη του φαινομένου καθορίζεται πλήρως από την πληροφορία  $(u(t), w(t))$ . Ενδέχεται όμως να υπάρξουν περιπτώσεις όπου η περιγραφή της κατάστασης ενός συστήματος να απαιτεί τον προσδιορισμό ενός *πλήθους μεταβλητών*  $q^r$ ,  $r = 1, \dots, N$ . Αυτές οι μεταβλητές μπορούν να ονομαστούν *εσωτερικές μεταβλητές κατάστασης* (Ε.Μ.Κ.). Θεωρώντας το διάνυσμα  $q \in X$ , όπου  $X$  χώρος εφοδιασμένος με κάποια νόρμα, η εξέλιξη των Ε.Μ.Κ. μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\mathbf{q}(t) = \left[ \mathcal{S}(u, \mathbf{q}^0) \right](t) \quad \text{and} \quad w(t) = \mathcal{T}(\mathbf{q}(t)) \quad (2.3.11)$$

όπου

- $\mathbf{q}^0$  το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών,
- $\mathcal{S} : C^0([0, t_f]) \times X \rightarrow X$  ο υστερητικός τελεστής,
- $\mathcal{T} : X \rightarrow \mathbb{R}$  ένας μετασχηματισμός κατάστασης εξόδου (δίχως μνήμη).

Ως εκ τούτου, ο τελεστής  $\mathcal{W} : C^0([0, t_f]) \times X \rightarrow C^0([0, t_f])$  στην έκφραση  $w(t) = [\mathcal{W}(u, \mathbf{q}^0)](t)$  ορίζεται μέσω της σχέσης (2.3.11). Οι Ε.Μ.Κ. οφείλουν την ονομασία τους στο γεγονός ότι δεν είναι ελέγξιμες (controllable) και απαντώνται συχνά σε προβλήματα πλαστικότητας, π.χ. Lemaître και Chaboche [51]. Οι Ε.Μ.Κ. μπορούν να είναι είτε «φυσικές» μεταβλητές, οι οποίες αναπαριστούν μια φυσικοχημική διαδικασία, είτε «φαινομενολογικές» μεταβλητές οι οποίες, αν και δεν έχουν άμεση σχέση με την μικρομηχανική του σώματος, εντούτοις μπορούν να μετρηθούν σχετικά εύκολα [4].

Οι ιδιότητες οι οποίες αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα εύκολα αναδιατυπώνονται ώστε να συμπεριλάβουν την θεώρηση Ε.Μ.Κ. Για παράδειγμα, η ιδιότητα υποσυνόλου μπορεί να γραφτεί ως:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (u, \mathbf{q}^0) \in \text{Dom}(\mathcal{W}), \forall [t_1, t_2] \subset (0, t_f] \\ \text{setting } \mathbf{q}(t_1) := \mathcal{S}[(u, \mathbf{q}^0)](t_1), \text{ then} \\ [\mathcal{W}(u, \mathbf{q}^0)](t_2) = [\mathcal{W}(u(t_1 + \cdot), \mathbf{q}(t_1))](t_2 - t_1) \end{array} \right. \quad (2.3.12)$$

## 2.4 Συναφή υστερητικά προσομοιώματα

### 2.4.1 Το προσομοίωμα Preisach

Το προσομοίωμα Preisach [14] αρχικά αναπτύχθηκε με βάση κάποιες εύλογες υποθέσεις σχετικά με την φύση του μαγνητισμού [13]. Θεωρούμε μια άπειρη ομάδα από απλούς υστερητικούς τελεστές  $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ , κάθε ένας εκ των οποίων αναπαρίσταται από έναν ορθογωνικό βρόχο (Εικόνα 2.4.1α). Οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  με  $\alpha \geq \beta$  αντιστοιχούν στην «άνω» και «κάτω» θέση διακόπτη της συνάρτησης εισόδου  $u$ , αντίστοιχα. Η συνάρτηση εξόδου μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές, ήτοι +1 ή -1. Όταν η τιμή της εισόδου αυξάνεται μονοτονικά,

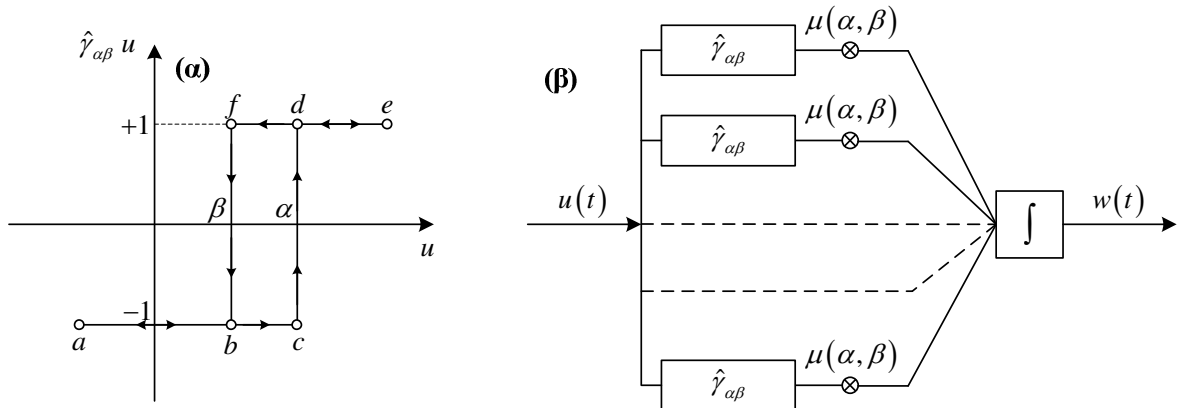


ακολουθείται ο κλάδος  $abcde$ . Αντίστοιχα, όταν η τιμή της εισόδου μειώνεται μονοτονικά, ακολουθείται ο κλάδος  $edfba$ .

Σε κάθε απλό υστερητικό τελεστή  $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$  αντιστοιχεί μια συνάρτηση βάρους  $\mu(\alpha, \beta)$  η οποία ονομάζεται συνάρτηση Preisach. Σύμφωνα με την Εικόνα 2.4.1β, το προσομοίωμα Preisach μπορεί να γραφεί ως:

$$w(t) = \hat{\Gamma}u(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \hat{\gamma}_{\alpha\beta} u(t) d\alpha d\beta \quad (2.4.1)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν και το προσομοίωμα Preisach προκύπτει από απλούς υστερητικούς τελεστές με τοπική μνήμη, το ίδιο συχνά παρουσιάζει μη-τοπική μνήμη [13].



**Εικόνα 2.4.1: Προσομοίωμα Preisach: (α) Απλός υστερητικός τελεστής (β) σχηματική αναπαράσταση προσομοιώματος**

## 2.4.2 Το προσομοίωμα Masing

Το προσομοίωμα Masing [15] απαρτίζεται από μια σειρά ελαστοπλαστικών συστημάτων συνδεδεμένων παράλληλα. Αυτά παρουσιάζουν την ίδια ελαστική δυσκαμψία αλλά διαφορετικά σημεία διαρροής. Στην αρχική διατύπωση του προσομοιώματος ο Masing υπέθεσε ότι, αν η αρχική καμπύλη φόρτισης ενός συστήματος περιγράφεται από την

συνάρτηση  $f(r, x) = 0$ , όπου  $r$  η δύναμη επαναφοράς η οποία αντιστοιχεί σε μετατόπιση  $x$ , τότε οι καμπύλες φόρτισης και αποφόρτισης του ίδιου συστήματος σε σταθερή κατάσταση υπό ανακυκλιζόμενη φόρτιση θα έχουν την ίδια γεωμετρική μορφή, μεγεθυμένη με συντελεστή δύο και στις δύο κατευθύνσεις:

$$f\left(\frac{r-r_0}{2}, \frac{x-x_0}{2}\right) \quad (2.4.2)$$

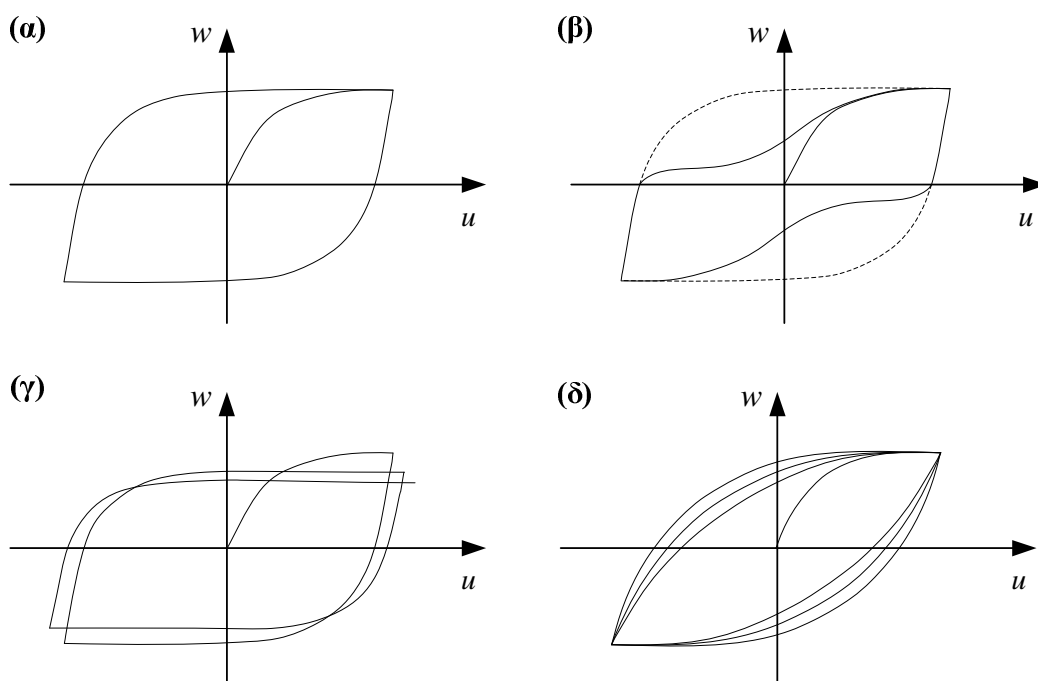
όπου,  $(x_0, r_0)$  το σημείο αναστροφής του υπόψη κλάδου. Κατά την διάρκεια τυχαίας μεταβατικής φόρτισης, το προσομοίωμα Masing παρουσιάζει αλλαγές στην απόκριση χωρίς φυσική αιτία. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, ο Jayakumar [16] πρότεινε την χρήση δύο επιπλέον κανόνων οι οποίοι αφορούν ολοκληρωμένους και μη-ολοκληρωμένους υστερητικούς βρόχους. Αποδεικνύεται ότι το νέο προσομοίωμα μπορεί επίσης να περιγράψει πλήρως την υστερητική συμπεριφορά του προσομοιώματος του Iwan [17].

### **2.4.3 Το προσομοίωμα Kuhn**

Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν ιξοελαστικά προσομοιώματα των οποίων η συμπεριφορά είναι *σχεδόν* ανεξάρτητη από την συχνότητα φόρτισης (almost frequency independent). Μια τέτοια περίπτωση είναι το τροποποιημένο προσομοίωμα Kuhn [59] καθώς και το γενικευμένο προσομοίωμα Kuhn [60]. Τα προσομοιώματα αυτά προβλέπουν μια σχεδόν σταθερή εφαπτομένη απωλειών (loss tangent) για ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων, το οποίο είναι χαρακτηριστικό πολλών υλικών.

## **2.5 Εμπειρικά υστερητικά προσομοιώματα**

Για λόγους πληρότητας κρίνεται απαραίτητη η παρουσίαση μιας κατηγορίας υστερητικών προσομοιωμάτων τα οποία δεν βασίζονται σε υστερητικούς τελεστές. Αντίθετα, ο ορισμός τους βασίζεται σε μια εμπειρική προσέγγιση των φαινομένων.



**Εικόνα 2.5.1: Ποιοτική αναπαράσταση φαινομένων: (α) απλός υστερητικός βρόχος (β) στένωση (γ) μείωση της αντοχής (δ) μείωση της δυσκαμψίας**

Τα προσομοιώματα αυτά είναι ιδιαίτερα διαδεδομένα και μπορούν να διακριθούν σε δύο υποκατηγορίες: τα πολυγραμμικά και τα πολυκαμπυλόγραμμα προσομοιώματα. Τα πλέον εξελιγμένα εξ' αυτών αντιμετωπίζουν με επιτυχία φαινόμενα μείωσης της δυσκαμψίας (stiffness degradation), μείωσης της αντοχής (strength deterioration) και στένωσης του διαγράμματος δύναμης – μετατόπισης (pinching), τα οποία αναπαριστώνται ποιοτικά στην Εικόνα 2.5.1.

### 2.5.1 Πολυγραμμικά υστερητικά προσομοιώματα

Μια κατηγορία υστερητικών προσομοιωμάτων η οποία χρησιμοποιείται κατ' εξοχήν σε εφαρμογές Μηχανικής είναι τα λεγόμενα *πολυγραμμικά υστερητικά προσομοιώματα*. Σε αυτά, κάθε κλάδος του διαγράμματος δύναμης – μετατόπισης ακολουθεί μια κατάλληλη γραμμική σχέση, ανάλογα με την ιστορία της απόκρισης. Τα πολυγραμμικά προσομοιώματα

είναι σχετικά εύκολα στην περιγραφή τους, συνήθως όμως κατά την υλοποίησή τους απαιτούν την διατήρηση μεγάλου αριθμού πληροφοριών, ιδιαίτερα σε ανακυκλιζόμενες φορτίσεις, με αποτέλεσμα η εφαρμογή τους να καθίσταται περίπλοκη. Αν και παρέχουν αρκετά αδρή προσομοίωση των πειραματικών δεδομένων, χρησιμοποιήθηκαν και χρησιμοποιούνται ευρέως λόγω της απλότητας της διατύπωσής τους.

Το απλούστερο προσομοίωμα αυτής της κατηγορίας είναι το γνωστό διγραμμικό προσομοίωμα. Σε αυτό οι Clough και Johnston [19] προσέθεσαν έναν μηχανισμό μείωσης της δυσκαμψίας. Στην περίπτωση επαναφόρτισης μετά από μερική αποφόρτιση πρότειναν έναν κανόνα ο οποίος οδηγούσε σε μη ρεαλιστική συμπεριφορά, όπως σημειώθηκε από τους Riddell και Newmark [20] αλλά και από τους Filippou και Issa [21]. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται εάν ο κλάδος της επαναφόρτισης ακολουθεί αυτόν της αποφόρτισης μέχρι ότου τμήσει τον αρχικό μονοτονικό κλάδο [21], ή στη γενικότερη περίπτωση μέχρι το σημείο της τελευταίας αλλαγής πρόσημου ταχύτητας [20]. Εξ' άλλου, ένα μειονέκτημα του προσομοιώματος είναι η σταθερή δυσκαμψία αποφόρτισης. Ο Anagnostopoulos [22] πρότεινε μια παραλλαγή του προσομοιώματος με διαφορετική αντιμετώπιση του ποσοστού απόσβεσης ενώ οι Wang και Shah [23] προσέθεσαν έναν μηχανισμό μείωσης της δυσκαμψίας και της αντοχής που βασίζεται στην συσσωρευμένη βλάβη που έχει υποστεί το μέλος.

Το επιτυχημένο προσομοίωμα των Takeda et al. [24] ανήκει επίσης σε αυτή την κατηγορία. Οι Otani [25] και Litton [26] παρουσίασαν απλούστερες εκδοχές του οι οποίες περιορίζουν το πλήθος των απαραίτητων κανόνων σε εννέα και δώδεκα, αντίστοιχα.

Το προσομοίωμα Q-hyst κατά Saiidi και Sozen [27] βρέθηκε ότι παρέχει προσομοίωση των πειραματικών δεδομένων αντίστοιχη του αρκετά πολυπλοκότερου προσομοιώματος Takeda.

Το προσομοίωμα των Mahin και Lin [28] βασίζεται επίσης στο διγραμμικό προσομοίωμα, στο οποίο έχει προστεθεί ένας μηχανισμός μείωσης της δυσκαμψίας.

Το προσομοίωμα των Roufaiel και Meyer [29] βασίζεται σε ένα διγραμμικό κορμό ενώ έχει προστεθεί ένας κανόνας που αντιμετωπίζει το φαινόμενο στένωσης. Μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή του προσομοιώματος αυτού από τους Chung et al. [30] εμβαθύνει στα φαινόμενα μείωσης της αντοχής και της δυσκαμψίας διατομών οπλισμένου σκυροδέματος.

Το προσομοίωμα των Park et al. [31] περιλαμβάνει μείωση της αντοχής, της δυσκαμψίας αλλά και το φαινόμενο της στένωσης. Η καινοτομία του συνίσταται στην χρήση ενός βοηθητικού σημείου περιστροφής για την χάραξη του κλάδου αποφόρτισης. Μια παραλλαγή του προσομοιώματος από τους Reinhorn et al. [32] προτείνει διαφορετική αντιμετώπιση του φαινομένου της στένωσης.

Το προσομοίωμα των Costa και Costa [34] αποτελεί γενίκευση του προσομοιώματος Takeda έτσι ώστε να είναι εφικτή η περιγραφή του φαινομένου της στένωσης και της μείωσης της αντοχής.

Το προσομοίωμα Coelho και Carvalho [35] χρησιμοποιεί μια διγραμμική μονοτονική καμπύλη φόρτισης και αντιμετωπίζει τα φαινόμενα μείωσης της αντοχής, μείωσης της δυσκαμψίας αλλά και το φαινόμενο της στένωσης.

Το προσομοίωμα του Mostaghel [33] χρησιμοποιεί πολλαπλές συναρτήσεις τύπου Heaviside για την περιγραφή υστερητικών συστημάτων. Αντιμετωπίζει τα φαινόμενα μείωσης της αντοχής, μείωσης της δυσκαμψίας, στένωσης αλλά και παραμορφωσιακής κράτυνσης.

### **2.5.2 Πολυκαμπυλόγραμμα υστερητικά προσομοιώματα**

Κατ' αναλογία με τα πολυγραμμικά προσομοιώματα, τα *πολυκαμπυλόγραμμα υστερητικά προσομοιώματα* χρησιμοποιούν κατάλληλες *μη γραμμικές* αλγεβρικές σχέσεις για να περιγράψουν κάθε κλάδο της απόκρισης.

Το προσομοίωμα των Eligehausen et al. [36] για ράβδους οπλισμού που παρουσιάζουν ολίσθηση ανήκει σε αυτήν την κατηγορία. Ένα παρόμοιο προσομοίωμα χρησιμοποιήθηκε από τους Salari και Spacone [37] για την περίπτωση συνδέσεων σκυροδέματος – χάλυβα, με την

διαφορά ότι η περιβάλλουσα απόκρισης καθορίζεται από έναν ανερχόμενο και έναν κατερχόμενο κλάδο (με παραμορφωσιακή χαλάρωση). Η συναρμογή μεταξύ των κλάδων επιτυγχάνεται με κατάλληλες καμπύλες Bernstein – Bezier [38]. Τέλος, σε αυτή την κατηγορία ανήκει και το προσομοίωμα των Elnashai και Elghazouli [39], το οποίο εφαρμόζεται σε σύμμικτες κατασκευές.

# 3

## Υστερητικά Προσομοιώματα Τύπου Bouc-Wen





### 3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται μια ανασκόπηση των κυριότερων προσομοιωμάτων τύπου Bouc-Wen που έχουν παρουσιασθεί κατά καιρούς στην βιβλιογραφία. Επισημαίνονται τα βασικά τους χαρακτηριστικά και αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο ενσωματώνονται φαινόμενα όπως η μείωση της αντοχής, η μείωση της δυσκαμψίας, η στένωση, η ασύμμετρη συμπεριφορά κατά την φόρτιση προς την θετική και την αρνητική κατεύθυνση, η παραμορφωσιακή κράτυνση κ.α. Όπου κρίνεται απαραίτητο, προτείνονται απλές τροποποιήσεις οι οποίες αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά τις διάφορες αδυναμίες τους.

### 3.2 Προσομοίωμα Bouc

#### 3.2.1 Αρχικό προσομοίωμα Bouc (1966)

Ο Bouc [5]-[9] μελέτησε τη συμπεριφορά ενός μονοβάθμιου συστήματος υπό την επίδραση μιας υστερητικής δύναμης επαναφοράς  $w(t)$  η οποία δίνεται από την σχέση:

$$w(t) = \mathcal{B}[u](t) \quad (3.2.1)$$

όπου:

- $u$  μία οποιαδήποτε συνάρτηση εισόδου,
- $w$  η αντίστοιχη συνάρτηση εξόδου,
- $\mathcal{B}[u]$  ο υστερητικός τελεστής του Bouc.

Για λόγους απλότητας, η σχέση (3.2.1) θα υπονοεί χρήση υστερητικού τελεστή τόσο μίας όσο και περισσότερων εσωτερικών μεταβλητών κατάστασης (§2.3.8). Επιπλέον, υπονοείται η εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες  $w^0$  χωρίς περαιτέρω αναφορά.

Έστω  $m$  η μάζα του συστήματος και  $t_0, t_f$ , η στιγμή αρχής και τέλους της διέγερσης, αντίστοιχα. Αν  $t \in I_t = [t_0, t_f]$  η τρέχουσα χρονική στιγμή, τότε είναι:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 u}{dt^2} + w(t) = p(t) \\ w(t) = \mathcal{B}[u](t) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

όπου  $p(t)$  η δύναμη διέγερσης, φραγμένη στο  $I_t$ . Στην αρχική διατύπωση του Bouc η μάζα του συστήματος θεωρήθηκε μοναδιαία.

Σκοπός του Bouc ήταν η εύρεση μιας μονοσήμαντης διατύπωσης του τελεστή  $\mathcal{B}[u]$ . Ξεκινώντας από τη διατύπωση του Volterra [41] για μία ενδογενή δύναμη επαναφοράς και δεδομένου πως το πρόβλημα αφορούσε υστερητική συμπεριφορά υλικού, απαίτησε:

$$w(t) = \int_{t_0}^t \mu(t, t') du(t') = \mathcal{B}[u](t) \quad (3.2.3)$$

όπου  $\mu$  ενδογενής πυρήνας και  $t'$  οποιαδήποτε χρονική στιγμή (dummy time) ανάμεσα στο  $t_0$  και το  $t$ . Παράλληλα θεώρησε πως:

$$\mu(t, t') = \mu(t - t') \quad (3.2.4)$$

το οποίο υποδεικνύει ότι το υλικό δεν παρουσιάζει γήρανση (non-aging material). Ο αναγνώστης μπορεί να παρατηρήσει ομοιότητες των παραπάνω σχέσεων με τις αντίστοιχες της ιξοελαστικότητας (viscoelasticity).

Εξ ορισμού, ο πυρήνας  $\mu$  είναι μια φραγμένη, συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση του χρονικού βήματος  $\Delta_t = t - t'$ :

$$0 \leq \mu(\Delta_t) \leq \infty, \quad \frac{d\mu(\Delta_t)}{d\Delta_t} \leq 0 \quad (3.2.5)$$

Εφόσον το άνω όριο του ολοκληρώματος της σχέσης (3.2.3) είναι η τρέχουσα χρονική στιγμή  $t$ , ο τελεστής  $\mathcal{B}[u]$  πληροί την συνθήκη αιτιότητας (§2.3.2) ή αλλιώς είναι ένας τελεστής Volterra. Μολαταύτα, η παρουσία του Νευτώνειου χρόνου στη σχέση (3.2.3) καθιστά τον τελεστή εξαρτώμενο του ρυθμού επιβολής της διέγερσης (§2.3.3). Ο Bouc πρότεινε τον παρακάτω ορισμό του  $\mathcal{B}[u]$  συναρτήσει της «εσωτερικής» (μη Νευτώνειας)

χρονικής μεταβολής  $\Delta_u$ . Η μεταβολή αυτή πρέπει να σχετίζεται με τη χρονοϊστορία των επιβαλλόμενων παραμορφώσεων  $u(t)$  ώστε πράγματι ο τελεστής να προκύψει ανεξάρτητος του ρυθμού επιβολής της διέγερσης. Συνεπώς η σχέση (3.2.3) γράφεται:

$$w(t) = \int_{t_0}^t \mu(\Delta_u(t, t')) du(t') = \mathcal{B}[u](t) \quad (3.2.6)$$

όπου πλέον ο πυρήνας  $\mu$  είναι μια φραγμένη, θετική, συνεχής και μη φθίνουσα συνάρτηση του  $\Delta_u$ :

$$0 \leq \mu(\Delta_u) \leq \infty, \quad \frac{d\mu(\Delta_u)}{d\Delta_u} \leq 0 \quad (3.2.7)$$

Το εσωτερικό χρονικό βήμα  $\Delta_u$  ορίζεται με τη σειρά του ως μια θετική γνησίως αύξουσα συνάρτηση καθώς ο Νευτώνειος χρόνος  $t'$  απομακρύνεται από τον χρόνο  $t$ . Φυσικά το χρονικό βήμα  $\Delta_u$  πρέπει να οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτευχθεί το ζητούμενο, δηλαδή ένας τελεστής  $\mathcal{B}$  ανεξάρτητος του ρυθμού επιβολής της διέγερσης. Για παράδειγμα, στην περίπτωση κατά την οποία:

$$d\Delta_u = |du| = \left| \frac{du}{dt} \right| dt = \left| \frac{du}{d\tilde{t}} \right| d\tilde{t} := d\theta \quad (3.2.8)$$

με  $\tilde{t} = \varphi(t)$ , ο τελεστής  $\mathcal{B}$  είναι συνεπής με την συνθήκη της §2.3.3.

Ο Bouc θέλησε να φέρει τον τελεστή του ακόμα πιο κοντά στη φυσική του ερμηνεία. Έστω  $k$  μη αρνητική ποσότητα και  $f, \Phi$  δύο βαθμωτές συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(0) = 0; |f(u_1) - f(u_2)| &\leq K_1(A) |u_1 - u_2| \\ \Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \Phi(0) = 0; |\Phi(u_1) - \Phi(u_2)| &\leq K_2(A) |u_1 - u_2| \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

για κάθε  $A > 0$  και  $|u_1|, |u_2| < A$  με  $K_1(A), K_2(A)$  δύο θετικές μεταβλητές, δεδομένες για συγκεκριμένη τιμή του  $A$ . Η δύναμη επαναφοράς  $w = w(t)$  μπορεί τότε να γραφεί ως :

$$\begin{cases} w(t) = k u(t) + f(u(t)) + z(t) \\ z(t) = \int_{t_0}^t \mu(\Delta_u(t, t')) du \Phi(u(t')) \end{cases} \quad (3.2.10)$$

Είναι πλέον εμφανές πως στη σχέση (3.2.10) η συνάρτηση  $f$  παίζει το ρόλο μιας μη γραμμικής ελαστικής δύναμης επαναφοράς ενώ ο όρος  $z(t)$  εκφράζει την εξάρτηση της απόκρισης από την χρονοϊστορία της διέγερσης (ανελαστική συνιστώσα). Ο όρος  $\Phi$  ουσιαστικά «φιλτράρει» τη χρονοϊστορία των παραμορφώσεων ώστε η παράμετρος  $z$  να προκύψει ανεξάρτητη του ρυθμού μεταβολής της διέγερσης.

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.2.10) είναι ένα ολοκλήρωμα Lebesgue – Stieltjes [42] το οποίο υιοθετεί την ακόλουθη μορφή κατά Riemann:

$$z(t) = z(\theta(t)) = \int_0^{\theta(t)} \mu(\theta(t) - \theta') \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{d\theta'} d\theta' \quad (3.2.11)$$

όπου  $\theta$  εσωτερικός χρόνος που ικανοποιεί τη συνθήκη (3.2.8). Η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη της:

$$z(\theta) = \int_0^{\theta} \mu(\theta - \theta') \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{d\theta'} d\theta' \quad (3.2.12)$$

χάρις στην αρχή της ανεξαρτησίας.

Πλέον η (3.2.2) μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 w}{dt^2} + w(t) = p(t) \\ w(t) = k u(t) + f(u(t)) + z(t) \\ z(t) = \int_0^{\theta(t)} \mu(\theta(t) - \theta') \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{d\theta'} d\theta' \end{cases} \quad (3.2.13)$$

Ο Bouc επέλεξε μια μεταβολή  $\Delta_u$  τέτοια ώστε:

$$\Delta_u(t, t') = \theta(t) - \theta(t') = \theta - \theta' = \int_{t'}^t d\theta(\tau) = \int_{t'}^t \left| \frac{du}{d\tau} \right| d\tau := V_{t'}^t u \quad (3.2.14)$$

όπου  $V_{t'}^t u$  η λεγόμενη ολική μεταβολή του  $u$  στο χρονικό διάστημα  $[t', t]$ . Εύκολα αποδεικνύεται πως ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος του:

$$d\theta(\tau) = |du(\tau)| \quad (3.2.15)$$

Η συνάρτηση πυρήνα μπορεί να λάβει οιαδήποτε μορφή. Μολαταύτα, αποδεικνύεται πως η διαφορική μόνρφωση του τελεστή  $\mathcal{B}[u]$  είναι πάντοτε δυνατή αν ο πυρήνας είναι εκθετική συνάρτηση. Ακολουθεί η απόδειξη της πρότασης αυτής, αρχικά για ένα απλό εκθετικό μονώνυμο και εν συνεχεία για τη γενική περίπτωση.

### 3.2.2 Η περίπτωση του εκθετικού μονώνυμου

Θεωρούμε την απλή περίπτωση κατά την οποία:

$$k = 0, f(t) = 0, \Phi(u) = u \quad (3.2.16)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.2.13) προκύπτει :

$$w(t) = z(t) = \int_0^{\theta(t)} \mu(\theta(t) - \theta') \frac{du}{d\theta'} d\theta' \quad (3.2.17)$$

Λαμβάνουμε επίσης πυρήνα της μορφής:

$$\mu(\theta) = Ae^{-\beta\theta}, \quad A, \beta > 0 \quad (3.2.18)$$

ο οποίος ικανοποιεί τις απαιτήσεις (3.2.7).

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.2.17) προκύπτει:

$$\begin{aligned} dz(\theta) &= \left[ Ae^{-\beta(\theta-\theta')} du(\theta') \right]_{\theta'=\theta} - \left[ \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial(Ae^{-\beta(\theta-\theta')})}{\partial\theta} \frac{du(\theta')}{d\theta'} d\theta' \right] d\theta \\ &= Adu(\theta) - \beta \left[ \int_{\theta_0}^{\theta} Ae^{-\beta(\theta-\theta')} \frac{du(\theta')}{d\theta'} d\theta' \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (3.2.17) προκύπτει:

$$dz = A du - \beta z d\theta \quad (3.2.20)$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{dz}{dt} = A \frac{du}{dt} - \beta z \frac{d\theta}{dt} \quad (3.2.21)$$

Επιβάλλοντας τη συνθήκη (3.2.15) προκύπτει η βασική διαφορική μορφή του προσομοιώματος Bouc:

$$\frac{dz}{dt} = [A - \beta z \operatorname{sgn}(du)] \frac{du}{dt} \quad A, \beta > 0 \quad (3.2.22)$$

ενώ η σχέση (3.2.13) γίνεται:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 u}{dt^2} + w(t) = p(t) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{dz}{dt} = [A - \beta z \operatorname{sgn}(du)] \frac{du}{dt} \end{cases} \quad (3.2.23)$$

### 3.2.3 Η περίπτωση του εκθετικού πολυωνύμου

Στη γενική περίπτωση ο πυρήνας μπορεί να είναι της μορφής:

$$\mu(\theta) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-\beta_i(\theta(t)-\theta')} \quad (3.2.24)$$

όπου  $N$  πεπερασμένος φυσικός αριθμός και  $A_i, \beta_i$  τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες (3.2.5). Υποθέτοντας ότι  $\Phi(u) = u$  οι σχέσεις (3.2.13) γίνονται:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 w}{dt^2} + w(t) = p(t) \\ w(t) = k u(t) + f(u(t)) + z(t) \\ z(t) = \int_0^{\theta(t)} \left[ \sum_{i=1}^N A_i e^{-\beta(\theta(t)-\theta')} \right] \frac{du}{d\theta'} d\theta' \end{cases} \quad (3.2.25)$$

Όμοια με πριν, μέσω της (3.2.15) προκύπτει:

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{dz_i}{dt} = \sum_{i=1}^N [A_i - \beta_i z_i \operatorname{sgn}(du)] \frac{du}{dt} \quad (3.2.26)$$

Κάθε μεταβλητή  $z_i$  προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dz_i}{dt} = [A_i - \beta_i z_i \operatorname{sgn}(du)] \frac{du}{dt} \quad (3.2.27)$$

Η εξίσωση (3.2.13) γίνεται:

$$m \frac{d^2 w}{dt^2} + k u + f(u) + \sum_{i=1}^N z_i = p \quad (3.2.28)$$

$$\frac{dz_i}{dt} = [A_i - \beta_i z_i \operatorname{sgn}(du)] \frac{du}{dt}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η διέγερση  $p(t)$  είναι περιοδική, ο Βουc απέδειξε πως μπορεί να καθοριστεί ένας ασυμπτωτικός βρόχος με πλάτος  $U$  [9]. Το γράφημα  $(u, w_D)$  του κλάδου αποφόρτισης δίνεται από τη σχέση:

$$w_D(u) = k u + f(u) + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\beta_i} \left[ -1 + 2 \frac{e^{\beta_i(U-u)}}{1 + e^{-2\beta_i U}} \right], \quad -U \leq u \leq U \quad (3.2.29)$$

Ο κλάδος φόρτισης είναι συμμετρικός με τον κλάδο αποφόρτισης ως προς την αρχή των αξόνων στο επίπεδο  $(u, w)$ . Επιπρόσθετα, ο Βουc καθόρισε τις ενεργειακές απώλειες του συστήματος οι οποίες ισούνται με το εμβαδόν της περικλειόμενης από τον βρόχο περιοχής:

$$W(U) = -2 \int_{-U}^U w_D(u) du = 4 \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\beta_i} \left( U - \frac{\tanh(\beta_i U)}{\beta_i} \right) \quad (3.2.30)$$

Σημειώνεται πως ο Βουc απέδειξε τις σχέσεις (3.2.29) και (3.2.30) για την περίπτωση κατά την οποία  $d\theta = |du|$ .

### 3.2.4 Μια γενικότερη περίπτωση

Έστω ότι η συνάρτηση  $\Phi$  είναι της γενικής μορφής  $\Phi = \Phi(u)$ , ικανοποιώντας φυσικά και τις συνθήκες (3.2.9), ενώ η συνάρτηση πυρήνα είναι της μορφής (3.2.18). Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με τις δύο παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dz}{dy} = A \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{dt} - \beta z \frac{d\theta}{dt} \quad (3.2.31)$$

η οποία αποτελεί τη γενική περίπτωση της (3.2.21). Κατά συνέπεια η (3.2.13) γίνεται:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 u}{dt^2} + w = p \\ w = k u + f(u) + z \\ \frac{dz}{dt} = A \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{dt} - \beta z \frac{d\theta}{dt} \end{cases} \quad (3.2.32)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφεί έτσι ώστε να μην απαιτείται ο έμμεσος καθορισμός της μεταβλητής  $z$ :

$$\begin{cases} m \frac{d^2 u}{dt^2} + w = p \\ \frac{dw}{dt} = \left( A \frac{d\Phi(u)}{du} + k + \frac{df(u)}{du} \right) \frac{du}{dt} - \beta (w - k u - f(u)) \frac{d\theta}{dt} \end{cases} \quad (3.2.33)$$

Μέσω της υπόθεσης  $d\theta = |du|$  τελικά προκύπτει:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 u}{dt^2} + w = p \\ \frac{dw}{dt} = \left( A \frac{d\Phi(u)}{du} + k + \frac{df(u)}{du} \right) \frac{du}{dt} - \beta \operatorname{sgn}(du) (w - k u - f(u)) \frac{du}{dt} \end{cases} \quad (3.2.34)$$

Πέραν του προσομοιώματος που παρουσιάστηκε, ο Bouc παρουσίασε δύο εναλλακτικά προσομοιώματα. Για την παρουσίαση αυτών η σχέση (3.2.33) μπορεί να ξαναγραφεί για  $f = 0$  και  $\Phi(u) = u$  ως εξής:



$$\begin{cases} m \ddot{u} + w = p \\ w = k u + z \\ \dot{z} = K \dot{u} \\ K = K(z, \text{sgn}(du)) = \frac{dz}{du} = A - \beta z \text{sgn}(du) \end{cases} \quad (3.2.35)$$

όπου:

- $k > 0$  είναι η μετελαστική δυσκαμψία,
- $A, \beta$  σταθερές του προσομοιώματος,
- $(\dot{\phantom{x}})$  το σύμβολο της παραγώγισης ως προς τον χρόνο.

Με βάση την σχέση (3.2.35), το αρχικό προσομοίωμα Bouc [6] απαιτεί τρεις παραμέτρους.

### 3.2.5 Τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc 2 (1967)

Ο Bouc [6] παρουσίασε επίσης το παρακάτω προσομοίωμα ως μία εναλλακτική έκδοση του προηγούμενου:

$$\begin{cases} m \ddot{u} + w = p \\ w = k u + z \\ \dot{z} = K \dot{u} \\ K = K(z, \text{sgn}(du)) = \frac{dz}{du} = A - \beta z \text{sgn}(du) - \gamma |z| \end{cases} \quad (3.2.36)$$

όπου:

- $k > 0$  είναι η μετελαστική δυσκαμψία,
- $A, \beta > 0, \gamma < \beta$  σταθερές του προσομοιώματος,
- $(\dot{\phantom{x}})$  το σύμβολο της παραγώγισης ως προς τον χρόνο.

Η παραπάνω έκφραση επιτρέπει καλύτερο έλεγχο πάνω στη μορφή των βρόχων και ιδιαίτερα στους κλάδους αποφόρτισης. Η αρχική κλίση αποφόρτισης μπορεί να προσεγγίσει

την αρχική κλίση φόρτισης  $A$ . Ουσιαστικά η παραπάνω ιδιότητα απετέλεσε απαίτηση επιβεβλημένη από μια σειρά πειραμάτων αντοχής υλικών.

### 3.2.6 Τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc 3 (1971)

Το 1971 ο Bouc [9] πρότεινε το ακόλουθο προσομοίωμα το οποίο μπορεί να αναπαραγάγει το φαινόμενο στένωσης. Θέτοντας  $k = 0$  και  $A = 1$  στην (3.2.34) κατέληξε στην:

$$\begin{cases} m \ddot{u} + w = p \\ w = f(u) + z \\ \dot{z} = K \dot{u} \\ K = K(u, z, \text{sgn}(du)) = \frac{d\Phi(u)}{du} - \beta z \text{sgn}(du) \end{cases} \quad (3.2.37)$$

με την συνάρτηση  $\Phi(u)$  να είναι:

$$\begin{cases} \Phi(u) = \begin{cases} B(u - u_0) & u > u_0 \\ 0 & |u| < u_0 \\ B(u + u_0) & u < -u_0 \end{cases} & B > 0, u_0 > 0 \\ f(u) = B u - \Phi(u) \end{cases} \quad (3.2.38)$$

όπου:

- $B, \beta$  παράμετροι υστέρησης,
- $u_0$  παράμετρος στένωσης.

## 3.3 Προσομοίωμα Bouc-Wen

### 3.3.1 Αρχικό προσομοίωμα Wen (1976)

Το 1976 ο Wen [1] παρουσίασε μια τροποποιημένη εκδοχή του προσομοιώματος του Bouc [6]. Είναι με αυτή την μορφή που αναγνωρίστηκε η χρησιμότητά του και χρησιμοποιήθηκε ευρέως για την περιγραφή υστερητικών φαινομένων. Η συνεισφορά του

Wen θεωρείται από κάποιους ερευνητές καθοριστική, σε σημείο που να αποκαλούν το προσομοίωμα Wen-Bouc [68]. Η ονομασία αυτή τελικά δεν υιοθετήθηκε από την επιστημονική κοινότητα.

Το αρχικό προσομοίωμα του Wen [1] μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{cases} w = h(\dot{u}) + f(u) + z \\ \dot{z} = K \dot{u} \\ K = K(z, \text{sgn}(du)) = A - |z|^n (\gamma + \beta \text{sgn}(z du)) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

όπου:

- $A, \beta, \gamma, n$  παράμετροι του προσομοιώματος,
- $h(\dot{u})$  μη γραμμικός όρος εξαρτώμενος από την ταχύτητα,
- $f(u)$  μη γραμμικός ελαστικός όρος.

Ο Wen θεώρησε δύο περιπτώσεις, ήτοι η παράμετρος  $n$  να είναι είτε άρτιος είτε περιττός ακέραιος αριθμός. Όμως είναι φανερό ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε θετική πραγματική τιμή, κάτι το οποίο οδηγεί σαφώς σε μια γενικότερη θεώρηση [18].

### 3.3.2 Τροποποιημένο προσομοίωμα Wen (1980)

Ο Wen [52] παρουσίασε μια ελαφρά διαφοροποιημένη διατύπωση του αρχικού προσομοιώματός του, θεωρώντας τις εξής υστερητικές παραμέτρους:  $A, a, K_0, \beta, \gamma, n$ . Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων γίνεται πλέον:

$$\begin{cases} m \ddot{u} + w = p \\ w = c \dot{u} + \alpha K_0 u + z \\ \dot{z} = K \dot{u} \\ K = K(z, \text{sgn}(du)) = (1 - \alpha) K_0 \left[ A - |z|^n (\gamma + \beta \text{sgn}(z du)) \right] \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Η νέα παράμετρος  $a$  αναπαριστά τον λόγο της μετελαστικής δυσκαμψίας προς την αρχική δυσκαμψία. Σημειώνεται ότι η παρουσία των παραμέτρων  $A$  και  $K_0$  στην ίδια σχέση αποτελεί πλεονασμό [62], κάτι το οποίο δεν έγινε αντιληπτό.

### 3.3.3 Προσομοίωμα Baber-Wen (1981)

Οι Baber και Wen [53] παρουσίασαν μια ακόμα τροποποιημένη έκδοση του προσομοιώματος, η οποία λαμβάνει υπόψη τόσο το φαινόμενο της μείωσης της αντοχής όσο αυτό της μείωσης της δυσκαμψίας κατά την ανακυκλιζόμενη φόρτιση.

Το προσομοίωμα Baber-Wen μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{cases} m \ddot{u} + w = p \\ w = c \dot{u} + \alpha K_0 u + z \\ \dot{z} = K \dot{u} \\ \dot{e} = z \dot{u} \\ K = K(z, \text{sgn}(du), e) = \frac{(1-\alpha)K_0}{\eta} \left[ A - \nu |z|^n (\gamma + \beta \text{sgn}(z du)) \right] \end{cases} \quad (3.3.3)$$

όπου  $\nu$  και  $\eta$  παράμετροι οι οποίες ελέγχουν την απομείωση αντοχής και δυσκαμψίας αντίστοιχα. Ο όρος  $A$  μπορεί επίσης να διατυπωθεί κατάλληλα ώστε με τη σειρά του να ελέγχει επίσης την εξέλιξη των δύο παραπάνω φαινομένων. Οι συγγραφείς πρότειναν τις παρακάτω συσχετίσεις μεταξύ των παραμέτρων  $A$ ,  $\nu$ ,  $\eta$  και των απωλειών ενέργειας του συστήματος:

$$\begin{cases} A = A(e) = A_0 - \delta_A e \\ \nu = \nu(e) = \nu_0 + \delta_\nu e \\ \eta = \eta(e) = \eta_0 + \delta_\eta e \end{cases} \quad (3.3.4)$$

όπου  $A_0$ ,  $\nu_0$ ,  $\eta$  είναι οι αρχικές τιμές των αντιστοιχων ποσοτήτων και  $e$  οι συνολικές ενεργειακές απώλειες. Στην πρωτότυπη εργασία των Baber-Wen η ποσότητα  $e$  ορίζεται ως μία γενικώς αύξουσα συνάρτηση.

### 3.4 Προσομοίωμα Baber-Noori

#### 3.4.1 Αρχικό προσομοίωμα Baber-Noori (1985)

Πρόκειται για το πρώτο προσομοίωμα το οποίο αποδίδει με τρόπο ουσιαστικό αλλά και εύχρηστο το φαινόμενο της στένωσης. Για την προσομοίωση της στένωσης, οι Baber και Noori [54] θεώρησαν ένα εξειδικευμένο ελατήριο συνδεδεμένο εν σειρά με το υστερητικό ελατήριο.

Το προσομοίωμα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ddot{u} + w = p \\ w = f(u) + \alpha K_0 u + z \\ \dot{z} = \frac{K_h K_p}{K_h + K_p} \dot{u} \\ \dot{e} = z \dot{u} \\ K_h = K_h(z, \text{sgn}(du), e) = \frac{(1-\alpha)K_0}{\eta} \left[ A - \nu |z|^n (\gamma + \beta \text{sgn}(z du)) \right] \\ K_p = K_p(z, e) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi} Z_\sigma} \Delta u e^{-\frac{z^2}{2Z_\sigma^2}} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

με:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = A(e) = A_0 - \delta_A e \\ \nu = \nu(e) = 1 + \delta_\nu e \\ \eta = \eta(e) = 1 + \delta_\eta e \end{array} \right. \quad (3.4.2)$$

Προφανώς, οι νόμοι απομείωσης είναι όμοιοι με τους αντίστοιχους του προηγούμενου προσομοιώματος. Η παράμετρος  $\Delta u$  σχετίζεται με τον όρο δυσκαμψίας  $K_p$  και ορίζει τη συνολική ολίσθηση η οποία λαμβάνει χώρα υπό θετική (αντίστοιχα αρνητική) φόρτιση στο διάστημα μεταξύ  $z = -\infty$  (αντ.  $\infty$ ) και  $z = \infty$  (αντ.  $-\infty$ ). Πρακτικά, μπορεί να θεωρηθεί ότι η συνολική ολίσθηση  $\Delta u$  αναπτύσσεται πλήρως στο διάστημα  $(-3Z_\sigma, 3Z_\sigma)$ . Η παράμετρος  $Z_\sigma$  σχετίζεται με την κατανομή της στένωσης. Υψηλές τιμές του  $Z_\sigma$  έχουν ως

αποτέλεσμα πιο ομοιόμορφη (ομαλή) κατανομή. Για τις παραμέτρους  $\Delta u$  και  $Z_\sigma$  οι συγγραφείς πρότειναν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta u(e) = \delta_u e \\ Z_\sigma = Z_\sigma(e) = Z_{\sigma 0} + \delta_\sigma e \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Οι νόμοι απομείωσης ελέγχονται και εδώ από τις συνολικές ενεργειακές απώλειες  $e$ .

### 3.4.2 Εναλλακτικό προσομοίωμα Baber-Noori (1986)

Οι Baber και Noori επανήλθαν [55] προτείνοντας έναν διαφορετικό τρόπο για την εισαγωγή του φαινομένου στένωσης στο υστερητικό προσομοίωμα. Πλέον το φαινόμενο λαμβάνεται υπόψη μέσω μιας συνάρτησης  $h = h(z)$  η οποία πολλαπλασιάζεται με την υστερητική δυσκαμψία  $K$ . Προκύπτει έτσι η ακόλουθη διατύπωση:

$$\begin{cases} m \ddot{u} + w = p \\ w = c \dot{u} + \alpha K_0 u + z \\ \dot{z} = K \dot{u} \\ \dot{e} = z \dot{u} \\ K = K(z, \text{sgn}(du), e) = (1 - \alpha) A \frac{h}{\eta} \left[ 1 - |z|^n (\gamma + \beta \text{sgn}(z du)) \right] \end{cases} \quad (3.4.4)$$

με:

$$\begin{cases} A = A(e) = A_0 - \delta_A e \\ \nu = \nu(e) = 1 + \delta_\nu e \\ \eta = \eta(e) = 1 + \delta_\eta e \end{cases} \quad (3.4.5)$$

και:

$$\begin{cases} h = h(z, e) = 1 - \zeta_1 \exp\left(\frac{z^2}{2\zeta_2^2}\right) \\ \zeta_1 = \zeta_1(e) = \zeta_{1,0} (1 - \exp(-p e)) \\ \zeta_2 = \zeta_2(e) = (\zeta_0 + \delta_\zeta)(\lambda + \zeta_1(e)) \end{cases} \quad (3.4.6)$$

Από τις σχέσεις (3.4.6) προκύπτει ότι η συσχέτιση της  $h$  με την  $z$  ακολουθεί κατανομή Gauss με μέση τιμή μηδέν. Αν και η διατύπωση αυτή απομακρύνεται αρκετά από το φυσικό πρόβλημα, υπό την έννοια πως δεν είναι εμφανής η συσχέτιση του φαινομένου στένωσης με την συνάρτηση  $h(z)$ , το προσομοίωμα αυτό αποδεικνύεται αρκετά πιο εύχρηστο.

### 3.5 Προσομοίωμα Foliente (1995)

Ο Foliente [43] πρότεινε μία ακόμα τροποποίηση στο προσομοίωμα Baber – Noori ούτως ώστε να βελτιώσει την προσομοίωση του φαινομένου της στένωσης. Για την συσχέτιση της συνάρτησης  $h$  με την  $z$  υιοθέτησε μια κατανομή Gauss με μέση τιμή  $\bar{z}$  διάφορη του μηδενός. Η διατύπωση του προσομοιώματος έχει ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ddot{u} + w = p \\ w = c \dot{u} + \alpha K_0 u + z \\ \dot{z} = K \dot{u} \\ \dot{e} = z \dot{u} \\ K = K(z, \text{sgn}(du), e) = (1 - \alpha) K_0 \frac{h}{\eta} \left[ 1 - |z|^n (\gamma + \beta \text{sgn}(z du)) \right] \end{array} \right. \quad (3.5.1)$$

όπου:

$$\left\{ \begin{array}{l} h = h(z, \text{sgn}(du), e) = 1 - \zeta_1 \exp\left(-\frac{(z - \bar{z} \text{sgn}(du))^2}{\zeta_2^2}\right) \\ \bar{z} = \bar{z}(e) = q \left( \frac{1}{v(\gamma + \beta)} \right)^{\frac{1}{n}} \\ v = v(e) = 1 + \delta_v e \\ \eta = \eta(e) = 1 + \delta_\eta e \\ \zeta_1 = \zeta_1(e) = \zeta_{1,0} (1 - \exp(-p e)) \\ \zeta_2 = \zeta_2(e) = (\xi_0 + \delta_\xi)(\lambda + \zeta_1(e)) \end{array} \right. \quad (3.5.2)$$

Η συνάρτηση  $h$  πλέον επιτρέπει καλύτερη προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων. Επίσης, παρατηρείται ότι την παραπάνω διατύπωση έχει τεθεί  $A_0 = 1$  ενώ και η σχέση που

καθορίζει την εξέλιξη του  $A$  έχει αγνοηθεί. Κατά συνέπεια, ο πλεονασμός των παραμέτρων παύει να υφίσταται. Στην συνέχεια, οι Foliente et al. [44] χρησιμοποίησαν το εν λόγω προσομοίωμα για την στοχαστική ανάλυση ενός μονοβάθμιου συστήματος.

### 3.6 Προσομοίωμα Sivaselvan – Reinhorn (2000)

Οι Sivaselvan και Reinhorn [46] παρουσίασαν ένα ομαλό υστερητικό προσομοίωμα τύπου Bouc-Wen, το οποίο έχει ως κύριο σκοπό να ενοποιήσει τις διάφορες προσεγγίσεις που έχουν παρουσιαστεί κατά καιρούς. Σε αυτό έχουν υλοποιηθεί όλες οι απαραίτητες τεχνικές για την περιγραφή φαινομένων όπως η μείωση της αντοχής, η μείωση της δυσκαμψίας, η στένωση, η παραμορφωσιακή κράτυνση, η ασύμμετρη συμπεριφορά σε θετική και αρνητική κατεύθυνση φόρτισης κ.λ.π. Το προσομοίωμα μπορεί να γραφεί συνοπτικά ως εξής:

$$\begin{cases} m \ddot{u} + w = p \\ w = a K_0 u + z \\ \dot{z} = \frac{K_h K_p}{K_h + K_p} \dot{u} \end{cases} \quad (3.6.1)$$

με:

$$\begin{cases} \dot{e}_d = \begin{cases} z \dot{u} - \frac{z \dot{z}}{2 R_k K_0}, & z \dot{u} \geq 0 \\ 0, & z \dot{u} < 0 \end{cases} \\ u_{\max}^+ = \max_{\tau \leq t} (u(\tau)) \\ u_{\max}^- = \min_{\tau \leq t} (u(\tau)) \\ K_h = (R_k - a) K_0 \left( 1 - \left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\eta_1 + \eta_2 \operatorname{sgn}(z du)) \right) \\ K_p = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi} Z_\sigma} \Delta u_p \exp \left( - \frac{(z - \bar{z} \operatorname{sgn}(du))^2}{2 Z_\sigma^2} \right) \right)^{-1} \end{cases} \quad (3.6.2)$$

όπου:



$$\left\{ \begin{array}{l} z_y = z_{y,0} R_z \\ R_z = \left[ 1 - \left| \frac{u_{\max}^{+/-}}{u_{\text{ult}}^{+/-}} \right|^{\frac{1}{\beta_1}} \right] \left( 1 - \frac{\beta_1}{1 - \beta_2} \frac{e_d}{e_{d,\text{ult}}} \right) \\ R_k = \frac{z + \delta z_y}{K_0 u + \delta z_y} \\ z_\sigma = \sigma z_y \\ \bar{z} = \lambda z_y \\ \Delta u_p = R_s (u_{\max}^+ - u_{\max}^-) \end{array} \right. \quad (3.6.3)$$

Το προσομοίωμα αυτό παρουσιάζει ενδιαφέροντα στοιχεία αλλά και σημαντικές αδυναμίες. Αρκετές από αυτές επισημάνθηκαν από την συζήτηση των Wang και Foliente [47]. Επιπλέον αδυναμίες θα επισημανθούν στην συνέχεια και θα αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά. Η ονοματολογία που θα χρησιμοποιηθεί στις επόμενες παραγράφους είναι συνεπής με το αρχικό άρθρο [46].

### 3.6.1 Βασικό προσομοίωμα

Το βασικό προσομοίωμα μπορεί να αναπαρασταθεί από δύο ελατήρια συνδεδεμένα παράλληλα (Εικόνα 3.6.1). Το πρώτο ελατήριο είναι γραμμικώς ελαστικό. Παρ' όλα αυτά, η (σταθερή) δυσκαμψία του ισούται με την *μετελαστική* δυσκαμψία του συστήματος και δίνεται από την σχέση:

$$K_1 = a K_0 \quad (3.6.4)$$

όπου:

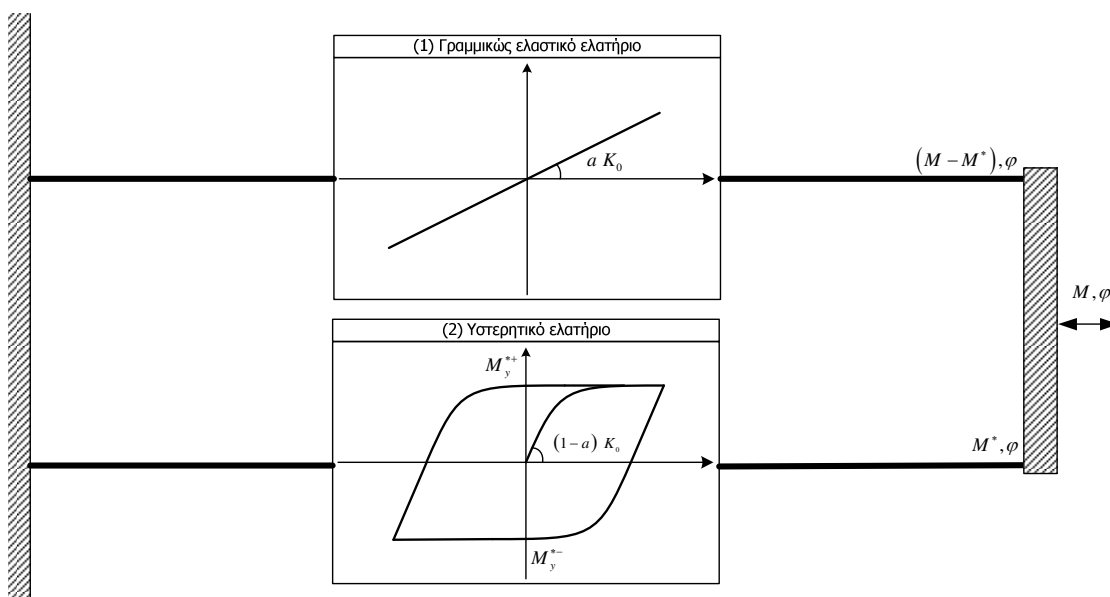
- $a$  ο λόγος της μετελαστικής δυσκαμψίας προς την ολική αρχική δυσκαμψία,
- $K_0$  η ολική αρχική δυσκαμψία.

Το δεύτερο ελατήριο είναι υστερητικό και παρουσιάζει ομαλή μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο. Η (μεταβαλλόμενη) δυσκαμψία του δίνεται κάθε στιγμή από την σχέση:

$$K_2 = (1-a) K_0 \left\{ 1 - \left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^N \left( \eta_1 \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) + \eta_2 \right) \right\} \quad (3.6.5)$$

όπου:

- $M^*$  η στιγμιαία καμπτική ροπή που αναλαμβάνει το υστερητικό ελατήριο,
- $M_y^* = (1-a)M_y$  η ροπή διαρροής του υστερητικού ελατηρίου, η οποία μπορεί να πάρει διαφορετική τιμή για την θετική και την αρνητική κατεύθυνση φόρτισης,
- $N$  θετικός συντελεστής που ελέγχει την ομαλότητα της μετάβασης από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο,
- $\eta_1, \eta_2$  συντελεστές που καθορίζουν την μορφή των υστερητικών βρόχων.



**Εικόνα 3.6.1: Βασική μορφή του υστερητικού προσομοιώματος Sivaselvan – Reinhorn [46]**

Η ολική δυσκαμψία του συστήματος (Εικόνα 3.6.1) δίνεται κάθε στιγμή από την σχέση:

$$K = K_1 + K_2 \quad (3.6.6)$$

Συνεπώς, το προσομοίωμα μπορεί να εκφραστεί από την παρακάτω εξίσωση:

$$\dot{M} = K \dot{\varphi} = \left\{ a K_0 + (1-a) K_0 \left\{ 1 - \left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^N \left( \eta_1 \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) + \eta_2 \right) \right\} \right\} \dot{\varphi} \quad (3.6.7)$$

Στη σχέση (3.6.7) ο βαθμός διαρροής του υστερητικού ελατηρίου εκφράζεται απ' ευθείας ως συνάρτηση του λόγου της στιγμιαίας ροπής  $M^*$  προς την ροπή διαρροής  $M_y^*$ . Επιπλέον, έχει δοθεί έμφαση στις δυσκαμψίες οι οποίες είναι άμεσα υπολογίσιμες για κάθε χρονική στιγμή και μπορούν να εισαχθούν απ' ευθείας στο προσομοίωμα της κατασκευής.

Επίσης, είναι φανερό ότι οι μεταβλητές  $\eta_1$  και  $\eta_2$  αντιστοιχούν στις μεταβλητές  $\beta$  και  $\gamma$  του προσομοιώματος Bouc-Wen. Έτσι, οι μεταβλητές αυτές θα πρέπει πάντα να έχουν άθροισμα ίσο με την μονάδα (§4.2.2). Η αναγκαιότητα του περιορισμού  $\eta_1 + \eta_2 = 1$  γίνεται φανερή, εάν αναλογιστούμε την περίπτωση του υστερητικού ελατηρίου που φορτίζεται μονοτονικά και φτάνει την ροπή διαρροής του. Από την (3.6.7) προκύπτει:

$$\dot{M}^* = (1-a) K_0 \left\{ 1 - \left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^N \left( \eta_1 \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) + \eta_2 \right) \right\} \dot{\varphi} \quad (3.6.8)$$

Ή αν απαλειφθεί ο χρόνος:

$$\frac{dM^*}{d\varphi} = (1-a) K_0 \left\{ 1 - \left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^N \left( \eta_1 \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) + \eta_2 \right) \right\} \quad (3.6.9)$$

Όμως το ελατήριο έχει φτάσει την ροπή διαρροής του και δεν υπάρχει δυνατότητα αύξησης της απόκρισής του. Συνεπώς:

$$K_2 = \frac{dM^*}{d\varphi} = 0, \quad \frac{M^*}{M_y^*} = 1, \quad \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) = 1 \quad (3.6.10)$$

Συνδυάζοντας τις (3.6.9) και (3.6.10) προκύπτει:

$$\eta_1 + \eta_2 = 1 \quad (3.6.11)$$

Η εξίσωση (3.6.11) θα *πρέπει να ισχύει πάντοτε* για να υπάρχει συμβατότητα με την κλασική πλαστικότητα και να έχει νόημα ο όρος «ροπή διαρροής» για το υστερητικό ελατήριο. Στην ειδική περίπτωση που  $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$ , οι κλάδοι αποφόρτισης είναι ευθείες γραμμές.

Εφόσον ισχύει ο περιορισμός (3.6.11) το προσομοίωμα δεν μπορεί να αντιμετωπίσει φαινόμενα παραμορφωσιακής κράτυσης (strain hardening). Η παραμορφωσιακή κράτυση αντιμετωπίστηκε από τον Wen [6] με χρήση κατάλληλων συνδυασμών των παραμέτρων  $\beta$  και  $\gamma$  οι οποίοι δεν ακολουθούσαν κατ' ανάγκη την σχέση (3.6.11). Είναι όμως σαφές ότι οι παράμετροι  $\beta$  και  $\gamma$  επηρεάζουν την συνολική απόκριση με έναν μη ελεγχόμενο τρόπο (§4.2.2). Η περίπτωση της παραμορφωσιακής κράτυσης αντιμετωπίζεται αποτελεσματικότερα με παράλληλη σύνδεση ενός κατάλληλου ελατηρίου αύξησης της δυσκαμψίας (gap closing spring), όπως περιγράφεται στην §3.6.6. Είναι σημαντικό το γεγονός ότι με αυτό τον τρόπο υποβαθμίζεται η επιρροή των παραμέτρων  $\beta$  και  $\gamma$  στην απόκριση του προσομοιώματος.

### 3.6.2 Ασύμμετρη ροπή διαρροής

Το προσομοίωμα μπορεί να αντιμετωπίσει την περίπτωση ασύμμετρης ροπής διαρροής κατά την θετική και την αρνητική κατεύθυνση φόρτισης. Η σχέση που προτάθηκε έχει ως εξής [46]:

$$M_y^* = (1-a) \left[ \left( \frac{1 + \text{sgn}(\dot{\phi})}{2} \right) M_y^+ + \left( \frac{1 - \text{sgn}(\dot{\phi})}{2} \right) M_y^- \right] \quad (3.6.12)$$

όπου,  $M_y^+$  και  $M_y^-$  η ροπή διαρροής κατά την θετική και αρνητική διεύθυνση φόρτισης, αντίστοιχα.

Οι Wang και Foliente [47] επισήμαναν ότι η σχέση (3.6.12) δίνει λάθος αποτελέσματα κατά την έναρξη της αποφόρτισης ή της επαναφόρτισης στην περίπτωση που  $M_y^+ \neq M_y^-$  και  $\eta_1 \neq \eta_2$ . Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος αντιπρότειναν την παρακάτω σχέση:



Από την γεωμετρία στην Εικόνα 3.6.2, υπολογίζεται ο συντελεστής μείωσης της δυσκαμψίας  $R_k = K_{cur} / K_0$  ως εξής:

$$R_k = \frac{\frac{M_{cur} + a_1 M_y}{|\varphi_{cur}| + |\varphi_1|}}{K_0 \frac{\varphi_{cur} + a_1 M_y}{|\varphi_{cur}| + |\varphi_1|}} = \frac{M_{cur} + a_1 M_y}{K_0 \varphi_{cur} + a_1 M_y} \quad (3.6.14)$$

όπου:

- $M_{cur}$  η τρέχουσα ροπή,
- $\varphi_{cur}$  η τρέχουσα καμπυλότητα,
- $M_y$  η ροπή διαρροής, η οποία είναι ίση με  $M_y^+$  όταν το τρέχον σημείο  $(\varphi_{cur}, M_{cur})$  βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο που ορίζει ο αρχικός ελαστικός κλάδος και ίση με  $M_y^-$  όταν βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο (Εικόνα 3.6.2),
- $a_1 > 0$  παράμετρος μείωσης της δυσκαμψίας,

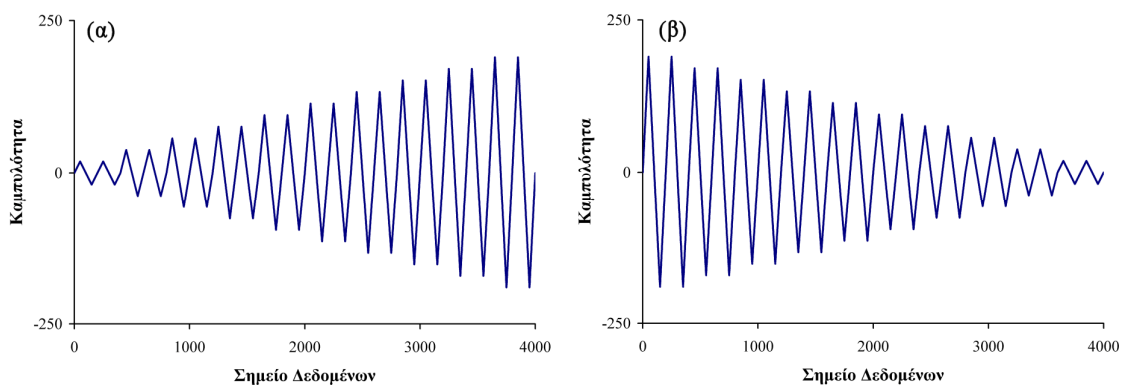
Η μείωση της δυσκαμψίας αφορά μόνο το υστερητικό ελατήριο. Για μεγάλες τιμές της παραμέτρου  $a_1$ , π.χ.  $a_1 > 200$ , ο συντελεστής  $R_k$  τείνει στην μονάδα. Συνεπώς οι κλάδοι φόρτισης / αποφόρτισης είναι παράλληλοι και το προσομοίωμα παρουσιάζει πρακτικά μηδενική μείωση της δυσκαμψίας. Αντίθετα, για μικρές τιμές της παραμέτρου, π.χ.  $a_1 < 10$ , έχουμε σοβαρή μείωση της δυσκαμψίας [45].

Η εν λόγω μέθοδος μείωσης της δυσκαμψίας είναι απλή και εύχρηστη. Εντούτοις, το μεγάλο μειονέκτημα της μεθόδου, το οποίο επισημάνθηκε εύστοχα από τους Wang και Foliente [47], είναι ότι δεν έχει *μνήμη* και αποτυγχάνει να συλλάβει την *συσσωρευτική* φύση του φαινομένου. Πράγματι, η τιμή της μεταβλητής  $R_k$  εξαρτάται μόνον από την τρέχουσα θέση  $(\varphi_{cur}, M_{cur})$  του συστήματος. Έτσι, το προσομοίωμα μπορεί να δώσει υπό περιπτώσεις λανθασμένα αποτελέσματα, αφού μπορεί να παρουσιάσει *αύξηση της δυσκαμψίας μέχρις σημείου πλήρους επαναφοράς στην αρχική τιμή*.

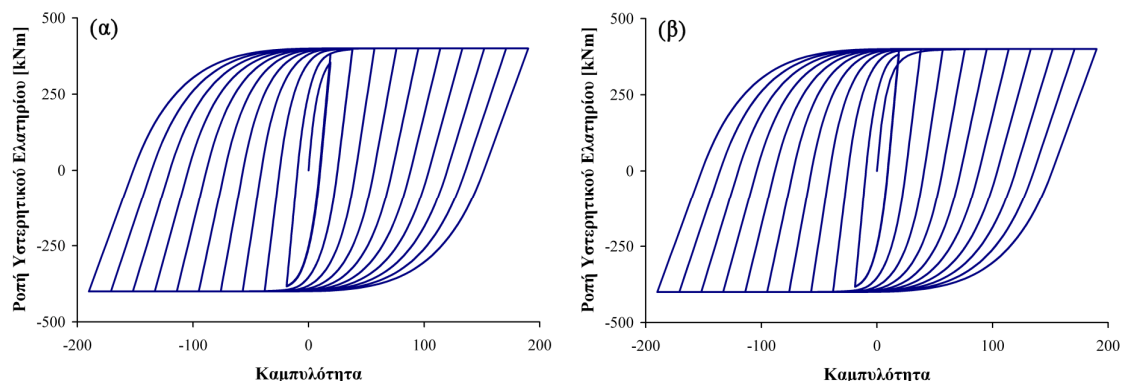
Για να αναδειχθεί το σημείο αυτό, θεωρούμε ένα υποθετικό πείραμα ανακυκλιζόμενης φόρτισης αυξανόμενου εύρους καθώς και το κατοπτρικό του ως προς τον χρόνο (Εικόνα 3.6.3). Οι φορτίσεις αυτές επιβάλλονται σε ένα σύστημα με κάποιες ενδεικτικές τιμές παραμέτρων [47] (Πίνακας 3.6.1). Οι αποκρίσεις για τις δύο περιπτώσεις φορτίσεων είναι φαινομενικά όμοιες (Εικόνα 3.6.4). Είναι όμως σαφές ότι στην περίπτωση της φόρτισης μειούμενου εύρους το σύστημα παρουσιάζει σταδιακή αύξηση της δυσκαμψίας.

Παράμετρος	Τιμή
$N$	1.0
$a$	0.0
$K_0$ [kN/m]	50.0
$M_y^+$ [kNm]	400.0
$M_y^-$ [kNm]	-400.0
$\eta_1$	0.5
$\eta_2$	0.5
$a_1$	5.0

Πίνακας 3.6.1: Παράμετροι προσομοιώματος



Εικόνα 3.6.3: (α) Κανονική φόρτιση (β) ανάστροφη φόρτιση



**Εικόνα 3.6.4: Απόκριση προσομοιώματος σε (α) κανονική φόρτιση (β) ανάστροφη φόρτιση**

Οι Sivaselvan και Reinhorn υποστηρίζουν ότι η παραπάνω θεώρηση είναι εύλογη και εφαρμόζεται σε συστήματα που παρουσιάζουν αποκατάσταση δυσκαμψίας (stiffness recovery) όπως για παράδειγμα σε μεταλλικούς αποσβεστήρες (steel dampers). Όμως κάτι τέτοιο δεν αναφέρεται στο αρχικό άρθρο [46]. Επιπλέον, γίνεται προβληματική η χρήση του προσομοιώματος στις περισσότερες περιπτώσεις όπου δεν παρατηρείται αποκατάσταση της δυσκαμψίας.

Από τα παραπάνω προκύπτει εύλογα το συμπέρασμα ότι *ο εμπειρικός κανόνας του σημείου περιστροφής προέκυψε λόγω της τυποποιημένης μορφής που έχουν τα πειράματα*, η οποία φαίνεται στην Εικόνα 3.6.3α, και σε αυτή την μορφή δεν μπορεί να έχει γενική ισχύ.

Κάτι τέτοιο αναγνωρίζεται εν τέλει και από τους Sivaselvan και Reinhorn [47], οι οποίοι προτείνουν την τροποποίηση της μεθόδου (χωρίς να την υλοποιούν), ούτως ώστε η μείωση της δυσκαμψίας να εξαρτάται από την μέγιστη καμπυλότητα  $\varphi_{max}$  σε συστήματα χωρίς αποκατάσταση δυσκαμψίας, ή από κάποια ενδιάμεση τιμή της τρέχουσας καμπυλότητας  $\varphi_{cur}$  και της μέγιστης καμπυλότητας  $\varphi_{max}$  σε συστήματα μερικής αποκατάστασης της δυσκαμψίας.

Αυτό μπορεί να υλοποιηθεί σχετικά εύκολα αφού η μέγιστη καμπυλότητα  $\varphi_{max}$  αποτελεί, όπως θα αναλυθεί στην συνέχεια, μια μεταβλητή κατάστασης του συστήματος. Σημειώνεται πάντως ότι η τιμή της μεταβλητής  $R_k$  της σχέσης (3.6.14) δεν εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα καμπυλότητα  $\varphi_{cur}$  αλλά και από την τρέχουσα ροπή  $M_{cur}$ .



Στην παρούσα διατριβή, για την αντιμετώπιση του προβλήματος της πλήρους αποκατάστασης της δυσκαμψίας προτείνεται ο απ' ευθείας έλεγχος του συντελεστή  $R_k$ . Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή μιας νέας παραμέτρου, έστω  $a_2$ , η οποία μπορεί να ονομαστεί *βαθμός αποκατάστασης της δυσκαμψίας*. Συνεπώς, στην περίπτωση του διορθωμένου προσομοιώματος λαμβάνονται υπόψη δύο μεταβλητές κατάσταση:

- η  $R_k^{min}$ , η οποία είναι *ο δυσμενέστερος συντελεστής μείωσης της δυσκαμψίας*. Η μεταβλητή αυτή αρχικοποιείται στην τιμή της μονάδας και μειώνεται καθώς εξελίσσεται το φαινόμενο, συγκρατώντας την ελάχιστη τιμή που παρατηρήθηκε.
- η  $R_k$ , η οποία είναι *ο τρέχων συντελεστής μείωσης της δυσκαμψίας*.

Σε κάθε χρονική στιγμή γίνεται έλεγχος για το αν η τρέχουσα θέση  $(\varphi_{cur}, M_{cur})$  βρίσκεται στο αριστερό ή το δεξί ημιεπίπεδο που ορίζει ο αρχικός ελαστικός κλάδος (Εικόνα 3.6.2). Αν βρίσκεται στο αριστερό, τότε  $M_y = M_y^-$  ενώ αν βρίσκεται στο δεξί,  $M_y = M_y^+$ . Αν βρίσκεται *επί* της ευθείας που χωρίζει τα δύο ημιεπίπεδα, τότε λαμβάνεται υπόψη το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της καμπυλότητας. Αν  $\dot{\varphi} > 0$  τότε  $M_y = M_y^+$ , ενώ αν  $\dot{\varphi} < 0$  τότε  $M_y = M_y^-$ .

Στην συνέχεια υπολογίζεται η *δοκιμαστική* τιμή του νέου συντελεστή μείωσης της δυσκαμψίας, η οποία εξαρτάται μόνον από την τρέχουσα θέση του συστήματος, όπως ακριβώς στο αρχικό προσομοίωμα:

$$R_k^{trial} = \frac{M_{cur} + a_1 M_y}{K_0 \varphi_{cur} + a_1 M_y} \quad (3.6.15)$$

Γίνεται έλεγχος αν η δοκιμαστική τιμή  $R_k'$  είναι μικρότερη από την  $R_{k \min}$  και συγκρατείται η μικρότερη εκ των δύο:

$$R_k^{min} = \min \{ R_k^{min}, R_k^{trial} \} \quad (3.6.16)$$

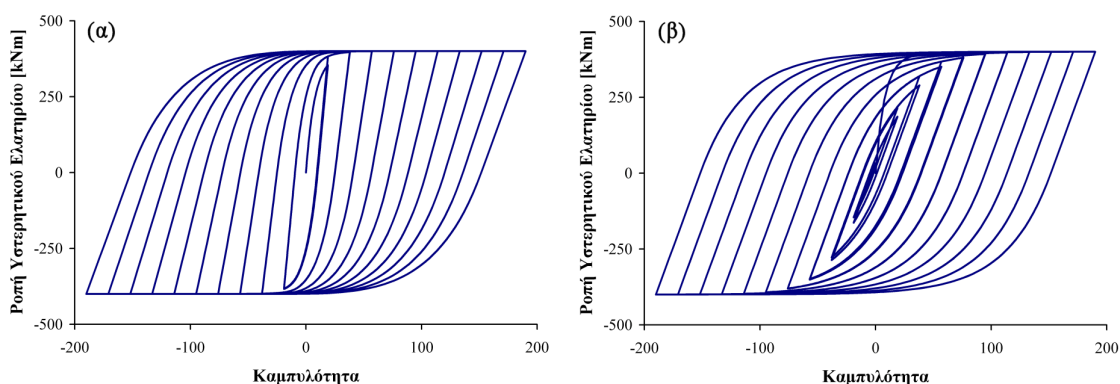
Τελικά, η τιμή του τρέχοντα συντελεστή μείωσης της δυσκαμψίας προκύπτει ως μια σταθμισμένη μέση τιμή της  $R_k^{trial}$  και της  $R_k^{min}$ , ως εξής:

$$R_k = R_k^{trial} + (1 - a_2)(R_k^{min} - R_k^{trial}) \quad (3.6.17)$$

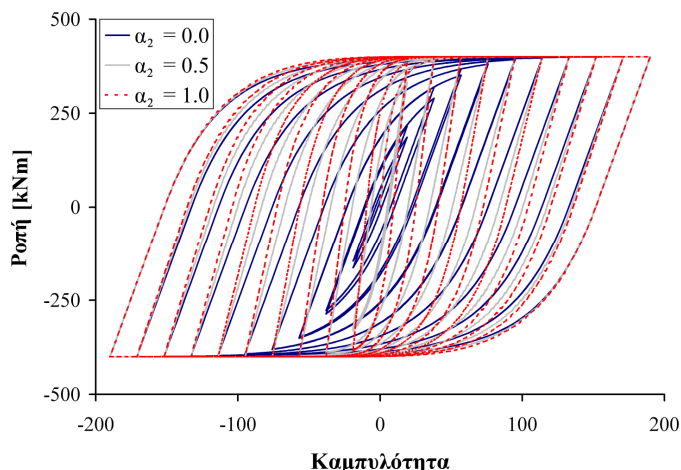
Είναι προφανές ότι όταν  $a_2 = 0$  το σύστημα παρουσιάζει μηδενική αποκατάσταση δυσκαμψίας και συνεπώς  $R_k = R_k^{min}$  πάντοτε. Αντίθετα, όταν  $a_2 = 1$  το προσομοίωμα είναι πανομοιότυπο με το αρχικό προσομοίωμα των Sivaselvan και Reinhorn [46].

Για να δειχθεί η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης διόρθωσης, τίθεται  $a_2 = 0$  στο ίδιο σύστημα που αναλύθηκε παραπάνω. Πλέον, οι αποκρίσεις κατά την κανονική και την ανάστροφη φόρτιση παρουσιάζουν σαφείς διαφορές (Εικόνα 3.6.5). Στην περίπτωση της ανάστροφης φόρτισης είναι προφανής η διατήρηση της μειωμένης δυσκαμψίας που οφείλεται στον έντονο πρώτο κύκλο.

Εάν επιλεγεί  $0 < a_2 < 1$  τότε η απόκριση του συστήματος παρουσιάζει μια ενδιάμεση συμπεριφορά, η οποία εξαρτάται τόσο από την τιμή της παραμέτρου  $a_2$  όσο και την μορφή της φόρτισης. Στην περίπτωση της κανονικής φόρτισης, η επίδραση της παραμέτρου  $a_2$  είναι ούτως ή άλλως πρακτικά μηδενική. Αντίθετα, η επίδραση της είναι σημαντική στην περίπτωση της ανάστροφης φόρτισης, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.6.6, όπου για  $a_2 = 1$  προκύπτει η απόκριση του αρχικού προσομοιώματος.



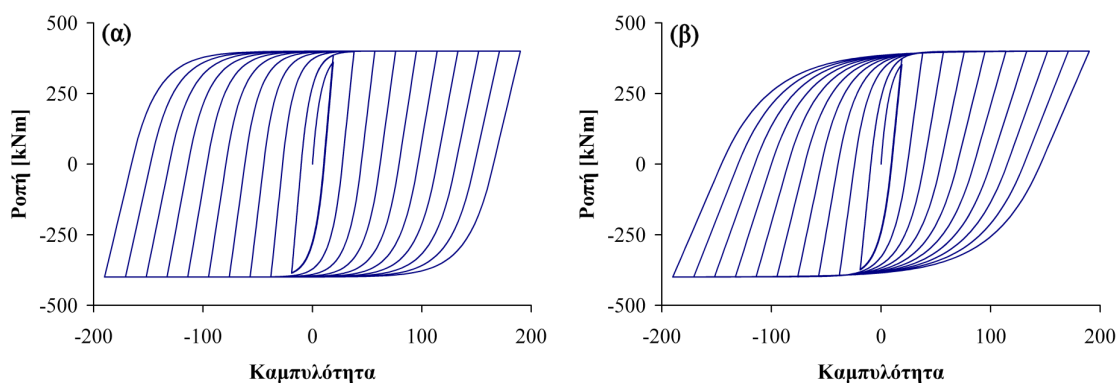
**Εικόνα 3.6.5: Απόκριση διορθωμένου προσομοιώματος με  $a_2=0.0$  σε (α) κανονική φόρτιση (β) ανάστροφη φόρτιση**



**Εικόνα 3.6.6:** Απόκριση διορθωμένου προσομοιώματος σε ανάστροφη φόρτιση

Η προτεινόμενη διόρθωση παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα:

- Αντιμετωπίζει αποτελεσματικά ένα σημαντικό μειονέκτημα του προσομοιώματος,
- Είναι απλή και μπορεί να ενσωματωθεί εύκολα,
- Απαιτεί την εισαγωγή μιας μόνο επιπλέον παραμέτρου η οποία έχει φυσική υπόσταση. Συνεπώς, αυτή μπορεί να εκτιμηθεί απ' ευθείας ανάλογα με την φύση του φυσικού συστήματος (δηλαδή χωρίς ταυτοποίηση).



**Εικόνα 3.6.7:** Απόκριση διορθωμένου προσομοιώματος στην κανονική φόρτιση με  $\alpha_2=0.0$  και (α)  $\alpha_1=10.0$ , (β)  $\alpha_1=4.0$

Τέλος, στην Εικόνα 3.6.7 φαίνεται η επιρροή της παραμέτρου  $a_1$ . Οι δύο αποκρίσεις αντιστοιχούν στην κανονική φόρτιση (Εικόνα 3.6.3α) με  $a_2 = 0$  και διαφορετικές τιμές της  $a_1$ .

### 3.6.4 Μείωση αντοχής

Η μείωση της αντοχής επιτυγχάνεται μέσω της μείωσης της ροπής διαρροής, ο οποία μπορεί να στηρίζεται σε κριτήρια πλαστιμότητας ή/και σε ενεργειακά κριτήρια. Ο νόμος μείωσης της ροπής διαρροής που προτείνεται [46] είναι ο εξής:

$$M_y^{+/-} = M_{y0}^{+/-} \left( 1 - \left( \frac{\varphi_{max}^{+/-}}{\varphi_{ult}^{+/-}} \right)^{1/\beta_1} \right) \left( 1 - \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} \frac{H}{H_{ult}} \right) \quad (3.6.18)$$

όπου:

- $M_{y0}^{+/-}$  η αρχική τιμή της ροπής διαρροής,
- $\varphi_{ult}^{+/-}$  η μέγιστη τιμή καμπυλότητας κατά την αστοχία σε μονοτονική φόρτιση,
- $\varphi_{max}^{+/-}$  η μέγιστη τιμή καμπυλότητας που έχει παρατηρηθεί μέχρι την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος,
- $H_{ult}$  η αναλίσκόμενη ενέργεια του υστερητικού ελατηρίου κατά την μονοτονική φόρτιση,
- $H$  η αναλίσκόμενη υστερητική ενέργεια,
- $\beta_1$  παράμετρος μείωσης της αντοχής που βασίζεται σε κριτήρια πλαστιμότητας,
- $\beta_2$  παράμετρος μείωσης της αντοχής που βασίζεται σε ενεργειακά κριτήρια.

Ο υπολογισμός της αναλίσκόμενης υστερητικής ενέργειας γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση. Η μεταβολή της σε ένα χρονικό βήμα δίνεται από την σχέση [46]:

$$\Delta H = \left( \frac{M + (M + \Delta M)}{2} \right) \left( \Delta \varphi - \frac{\Delta M}{R_k K_0} \right) \quad (3.6.19)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (3.6.18) προκύπτουν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις που καθορίζουν την μείωση της ροπής αντοχής [46]:

$$\frac{dM_y^{+/-}}{dt} = M_{y0}^{+/-} \times \left[ \left( 1 - \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} \frac{H}{H_{ult}} \right) \left( - \frac{(\varphi_{max}^{+/-})^{(1-\beta_1)/\beta_1}}{\beta_1 (\varphi_{ult}^{+/-})^{1/\beta_1}} \right) \dot{\varphi}_{max}^{+/-} + \left( 1 - \left( \frac{\varphi_{max}^{+/-}}{\varphi_{ult}^{+/-}} \right)^{1/\beta_1} \right) \left( \frac{-\beta_2}{(1 - \beta_2) H_{ult}} \right) \dot{H} \right] \quad (3.6.20)$$

Επίσης:

$$\dot{H} = M \left( \dot{\varphi} - \frac{\dot{M}}{R_k K_0} \right) = M \dot{\varphi} \left( 1 - \frac{(K_1 + R_k K_2)}{R_k K_0} \right) \quad (3.6.21)$$

Ενώ για την μέγιστη θετική και αρνητική καμπυλότητα λαμβάνεται:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{max}^+ &= \dot{\varphi} U(\varphi - \varphi_{max}^+) U(\dot{\varphi}) \\ \dot{\varphi}_{max}^- &= \dot{\varphi} U(\varphi_{max}^- - \varphi) (1 - U(\dot{\varphi})) \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

όπου  $U(x)$  η συνάρτηση Heaviside, η οποία εν προκειμένω ορίζεται ως εξής:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (3.6.23)$$

Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός  $U(x)$  αντί του  $H(x)$  για λόγους αποφυγής σύγχυσης με την αναλίσκόμενη υστερητική ενέργεια. Σημειώνεται ότι ο ορισμός (3.6.23) διαφέρει από τον κλασικό ορισμό [40] στο  $x = 0$ .

Η εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας για την μείωση της αντοχής αποδεικνύεται προβληματική. Κατ' αρχήν, σημειώνεται ότι η σχέση (3.6.20) δεν είναι γραμμένη ορθά. Πράγματι, στην περίπτωση φόρτισης κατά την αρνητική κατεύθυνση, οι καμπυλότητες  $\varphi_{ult}$  και  $\varphi_{max}$  είναι αρνητικοί αριθμοί και η ύψωση σε μη ακέραια δύναμη δεν είναι εφικτή. Είναι

προφανές ότι θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο *λόγος των καμπυλοτήτων*, ο οποίος είναι πάντα θετικός αριθμός, ως εξής:

$$P_\varphi = \frac{\varphi_{max}}{\varphi_{ult}}, P_{\dot{\varphi}} = \frac{\dot{\varphi}_{max}}{\varphi_{ult}} \quad (3.6.24)$$

Κατ' αντιστοιχία, οι λόγοι της αναλίσκόμενης υστερητικής ενέργειας δίνονται από τις σχέσεις:

$$P_H = \frac{H}{H_{ult}}, P_{\dot{H}} = \frac{\dot{H}}{H_{ult}} \quad (3.6.25)$$

Τελικά η σχέση (3.6.20) παίρνει την μορφή:

$$\frac{dM_y^{+/-}}{dt} = M_{y0}^{+/-} \left[ \left( 1 - \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} R_H \right) \left( -\frac{P_\varphi^{(1-\beta_1)/\beta_1}}{\beta_1} P_{\dot{\varphi}} \right) + \left( 1 - P_\varphi^{1/\beta_1} \right) \left( -\frac{\beta_2}{(1 - \beta_2)} P_{\dot{H}} \right) \right] \quad (3.6.26)$$

Επίσης, σημειώνεται ότι οι δύο παράγοντες μείωσης της ροπής αντοχής της σχέσης (3.6.18) θα πρέπει να πληρούν κάποιες ιδιότητες, όπως:

- η αρχική τιμή τους να είναι μονάδα,
- να είναι φθίνουσες συναρτήσεις του χρόνου,
- να έχουν πάντα θετική (μη μηδενική) τιμή.

Ο παράγοντας μείωσης με βάση την πλαστιμότητα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$R_\varphi = 1 - \left( \frac{\varphi_{max}^{+/-}}{\varphi_{ult}^{+/-}} \right)^{1/\beta_1} \quad (3.6.27)$$

Ο παράγοντας αυτός πληροί τις δύο πρώτες απαιτήσεις που αναφέρθηκαν. Όμως, όταν  $\varphi_{max}^{+/-} = \varphi_{ult}^{+/-}$  τότε ο παράγοντας μηδενίζεται. Η μέγιστη καμπυλότητα  $\varphi_{ult}^{+/-}$  είναι συμβατική, δηλαδή επιβάλλεται από ανάγκες περιορισμού των βλαβών της διατομής. Μπορεί να εκτιμηθεί από προσομοιώματα ινών (fiber models) με βάση την γεωμετρία της διατομής και

τις ιδιότητες των υλικών, όπως αναλύεται στο Κεφάλαιο 6. Στο σημείο αστοχίας η απόκριση της διατομής δεν είναι μηδενική και συνεπώς η συμπεριφορά της σχέσης (3.6.27) δεν συνάδει με την πραγματικότητα. Μια άλλη ένδειξη της ακαταλληλότητας της (3.6.27) είναι ότι, ενώ η ένταση της μείωσης της αντοχής μειώνεται καθώς μειώνεται η παράμετρος  $\beta_1$ , για  $\beta_1 = 0$  η εξίσωση δεν ορίζεται.

Ο παράγοντας μείωσης με βάση την απορροφηθείσα υστερητική ενέργεια δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$R_H = 1 - \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} \frac{H}{H_{ult}} \quad (3.6.28)$$

Ο παράγοντας αυτός πληροί τις δύο πρώτες απαιτήσεις που προαναφέρθηκαν, όμως δεν καλύπτει κατ' ανάγκη την τρίτη απαίτηση. Για τους παραπάνω λόγους, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω εναλλακτικές μέθοδοι μείωσης της αντοχής, όπως προτάθηκαν από τον Mostaghel [33].

$$M_y^{+/-} = M_{y0}^{+/-} \left( \frac{1}{1 + \beta_{m1} H} \right) \quad (3.6.29)$$

$$M_y^{+/-} = M_{y0}^{+/-} e^{-\beta_{m2} H} \quad (3.6.30)$$

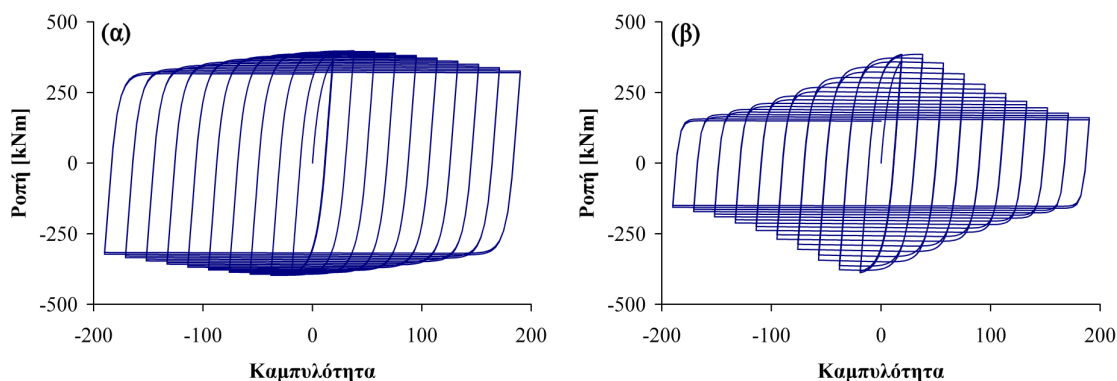
όπου:

- $M_{y0}^{+/-}$  η αρχική τιμή της ροπής διαρροής,
- $H$  η αναλισκόμενη υστερητική ενέργεια,
- $\beta_{m1}, \beta_{m2}$  παράμετροι μείωσης της αντοχής.

Στην παρούσα διατριβή, για την μείωση της αντοχής επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί η σχέση (3.6.29). Ο υπολογισμός της απορροφηθείσας υστερητικής ενέργειας γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση σύμφωνα με την σχέση (3.6.19). Παραγωγίζοντας την σχέση (3.6.29) προκύπτει η διαφορική εξίσωση που καθορίζει την μείωση της ροπής αντοχής:

$$\frac{dM_y^{+/-}}{dt} = M_{y0}^{+/-} \left( -\frac{\beta_{m1}}{(1 + \beta_{m1} H)^2} \dot{H} \right) \quad (3.6.31)$$

Η μεταβολή της αναλίσκόμενης υστερητικής ενέργειας με τον χρόνο δίνεται από την (3.6.21). Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται σχηματικά η επιρροή της παραμέτρου  $\beta_{m1}$  στην απόκριση του συστήματος που αναλύθηκε στην §3.6.3. Η απόκριση αντιστοιχεί στην περίπτωση της κανονικής ανακυκλιζόμενης φόρτισης (Εικόνα 3.6.3α).

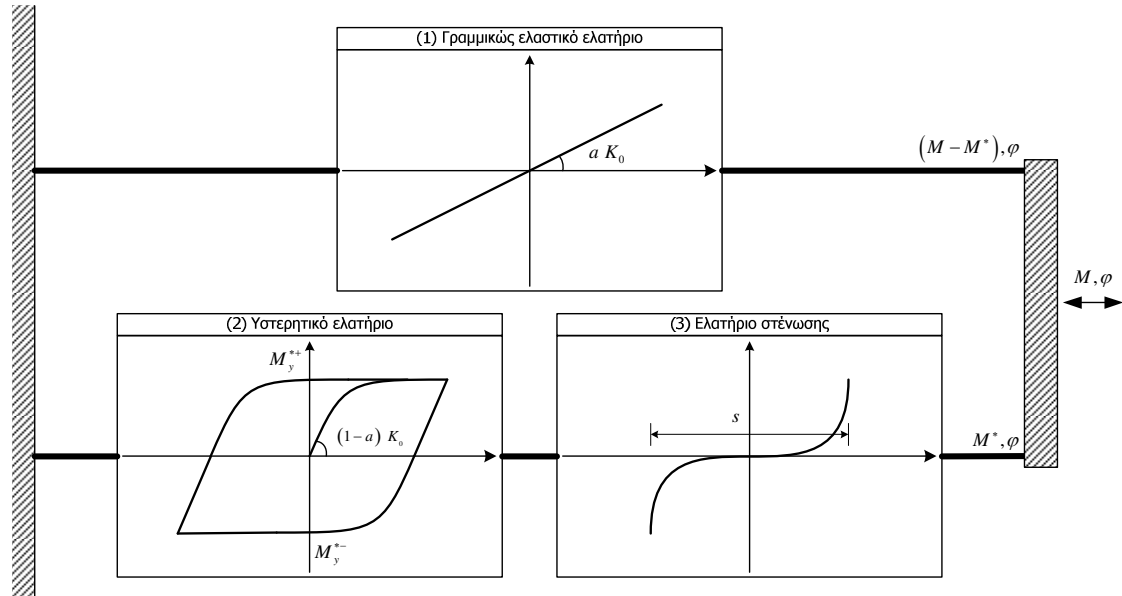


Εικόνα 3.6.8: Απόκριση με μείωση της ροπής αντοχής με (α)  $\beta_{m1}=10^{-7}$  (β)  $\beta_{m1}=10^{-6}$

### 3.6.5 Στένωση

Η στένωση του διαγράμματος ροπής – καμυλότητας (pinching) οφείλεται συνήθως σε κλείσιμο ρωγμών κατά την αλλαγή της φοράς φόρτισης ή σε ολίσθηση του οπλισμού [46]. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να ληφθεί υπόψη στο προσομοίωμα με την σύνδεση ενός εξειδικευμένου ελατηρίου στένωσης εν σειρά με το υστερητικό ελατήριο. Έτσι, το σύστημα παίρνει την μορφή που φαίνεται στην Εικόνα 3.6.9.





Εικόνα 3.6.9: Προσθήκη ελατηρίου στένωσης στο προσομοίωμα Sivaselvan–Reinhorn [46]

Η δυσκαμψία του ελατηρίου στένωσης (slip-lock spring) που προτείνεται από τους Sivaselvan και Reinhorn [46] δίνεται από την σχέση:

$$K_3 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s}{M_\sigma^*} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{M^* - \bar{M}^*}{M_\sigma^*} \right)^2 \right) \right\}^{-1} \quad (3.6.32)$$

όπου:

- $s = R_s (\varphi_{max}^+ - \varphi_{max}^-)$  το μήκος ολίσθησης,
- $M_\sigma^* = \sigma M_y^*$  το εύρος καμπτικής ροπής στο οποίο συμβαίνει η ολίσθηση,
- $\bar{M}^* = \lambda M_y^*$  η μέση τιμή της καμπτικής ροπής σε κάθε πλευρά γύρω από την οποία συμβαίνει η ολίσθηση,
- $\varphi_{max}^+, \varphi_{max}^-$  οι μέγιστες τιμές καμπυλότητας που έχουν επιτευχθεί έως την τρέχουσα χρονική στιγμή,
- $R_s, \sigma, \lambda$  παράμετροι στένωσης.

Σύμφωνα με την σχέση (3.6.32), η ευκαμψία του ελατηρίου στένωσης ακολουθεί μια κατανομή Gauss. Είναι σαφές ότι μπορεί να επιλεγεί κάποια άλλη κατανομή, αρκεί κάθε φορά να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{K_3} dM = s \quad (3.6.33)$$

Η συνδυασμένη δυσκαμψία του συστήματος που φαίνεται στην Εικόνα 3.6.9 είναι η εξής:

$$K = K_1 + \frac{K_2 K_3}{K_2 + K_3} \quad (3.6.34)$$

Οι Foliente και Wang [47] παρατήρησαν ότι η μορφή της εξίσωσης (3.6.32) είναι λάθος. Πράγματι, η ροπή  $M_{\sigma}^*$ , η οποία θα πρέπει να λαμβάνει πάντα θετικές τιμές, βασίζεται στην ροπή διαρροής  $M_y^*$  η οποία μπορεί να είναι αρνητική. Επιπλέον, για να αναπτυχθεί η ολίσθηση συμμετρικά στις θετικές και αρνητικές τιμές ροπής κάμψης, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη το πρόσημο της ταχύτητας μεταβολής της καμπυλότητας. Έτσι, αντιπροτείνουν την σχέση:

$$K_3 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s}{|M_{\sigma}^*|} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{M^* - |\bar{M}^*| \operatorname{sgn}(\dot{\phi})}{|M_{\sigma}^*|} \right)^2 \right) \right\}^{-1} \quad (3.6.35)$$

όπου:

- $s = R_s (\varphi_{max}^+ - \varphi_{max}^-)$  το μήκος ολίσθησης,
- $M_{\sigma}^* = \sigma M_y^*$  το εύρος της καμπτικής ροπής στο οποίο συμβαίνει η ολίσθηση,
- $\bar{M}^* = \lambda M_y^*$  η μέση τιμή καμπτικής ροπής σε κάθε πλευρά γύρω από την οποία συμβαίνει η ολίσθηση,
- $\varphi_{max}^+, \varphi_{max}^-$  οι μέγιστες τιμές καμπυλότητας που έχουν επιτευχθεί έως την τρέχουσα χρονική στιγμή,
- $R_s, \sigma, \lambda$  παράμετροι στένωσης.

Σημειώνεται πάντως ότι ούτε η μορφή της εξίσωσης (3.6.35) είναι σωστή. Πράγματι, μια τυχαία μεταβλητή  $x$  ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$  όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της δίνεται από την σχέση [48]:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in (-\infty, +\infty) \quad (3.6.36)$$

για την οποία ισχύει:

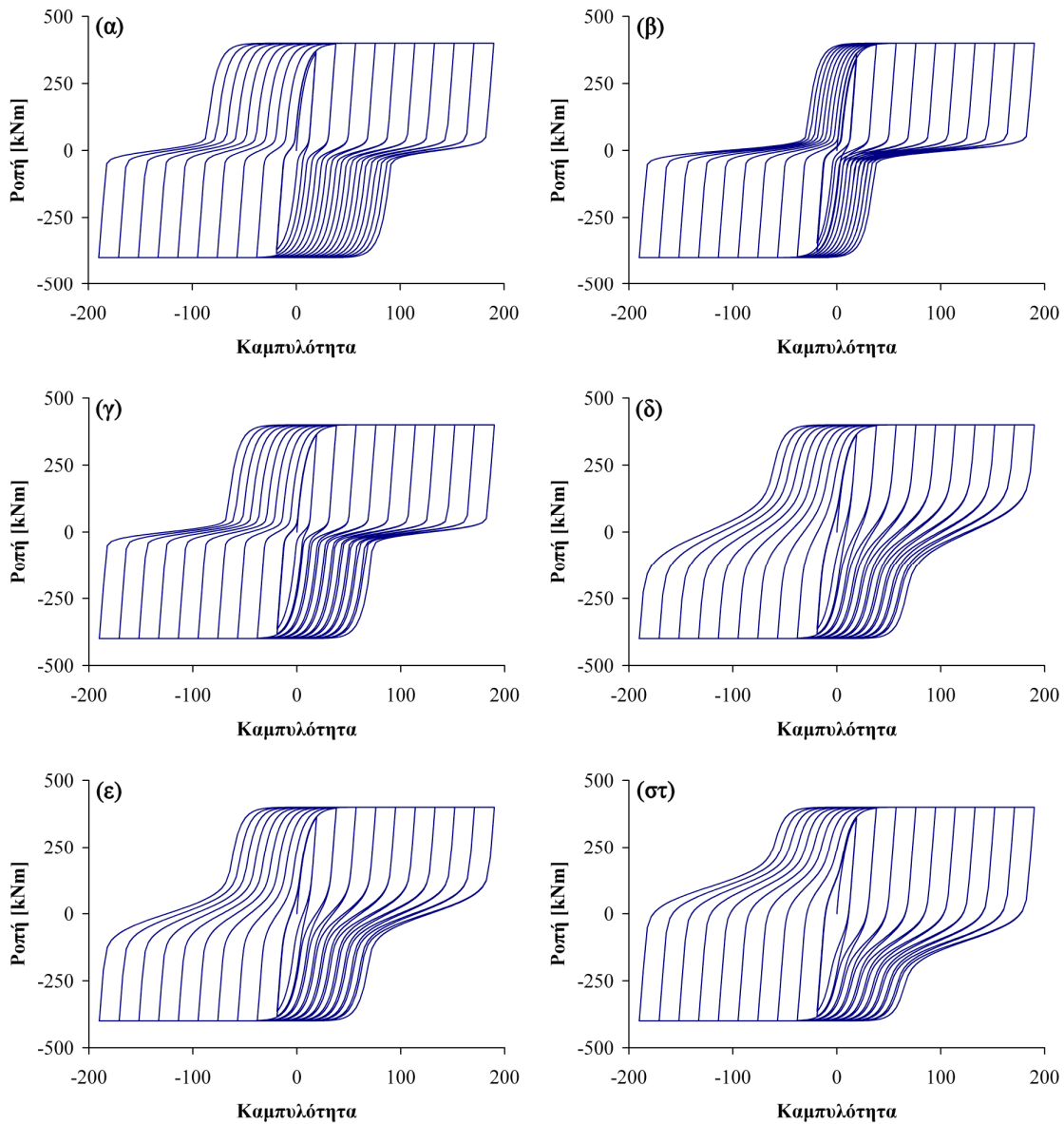
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1 \quad (3.6.37)$$

Η σύγκριση των σχέσεων (3.6.36) και (3.6.35) αναδεικνύει το λάθος. Συνεπώς, προτείνεται η χρήση της ορθής μορφής της σχέσης δυσκαμψίας του ελατηρίου, η οποία είναι η εξής:

$$K_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{s}{|M_\sigma^*|} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{M^* - |\bar{M}^*| \operatorname{sgn}(\phi)}{|M_\sigma^*|} \right)^2 \right) \right\}^{-1} \quad (3.6.38)$$

Σημειώνεται επίσης ότι η  $M^*$  δεν παίρνει τιμές από  $-\infty$  ως  $+\infty$ , όπως η τυχαία μεταβλητή της κανονικής κατανομής, αλλά από  $M_y^{*-}$  ως  $M_y^{*+}$  και αυτό μόνον κατά την διάρκεια έντονης ανακυκλιζόμενης φόρτισης. Έτσι, η σχέση (3.6.37) δεν έχει απόλυτη εφαρμογή στην περίπτωση μας και το ολοκλήρωμα  $(K_3)^{-1} dM$  δεν ισούται πρακτικά ποτέ με  $s$ .

Στην Εικόνα 3.6.10 φαίνεται σχηματικά η επιρροή των παραμέτρων  $R_s$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$  στην απόκριση του συστήματος που αναλύθηκε στην §3.6.3. Η απόκριση αντιστοιχεί στην περίπτωση της κανονικής ανακυκλιζόμενης φόρτισης (Εικόνα 3.6.3α).

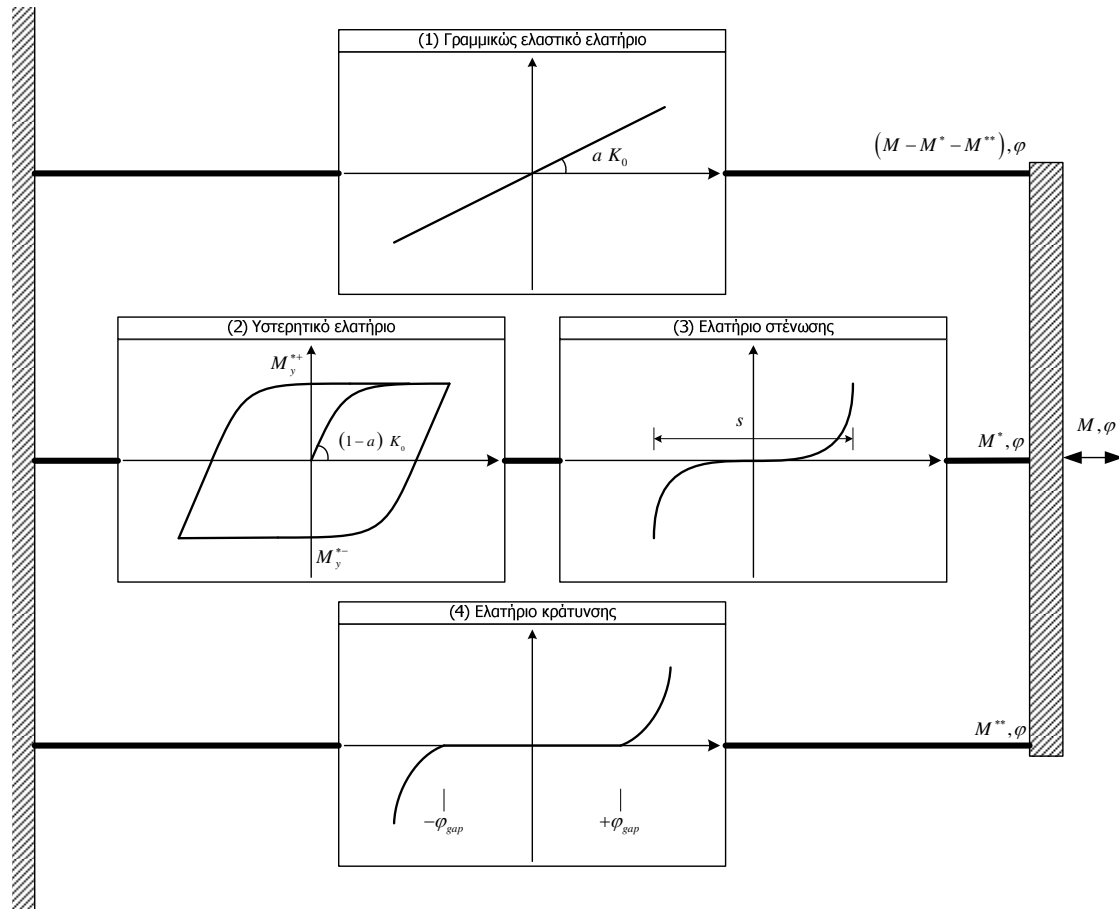


**Εικόνα 3.6.10: Απόκριση με στένωση με (α)  $R_s=0.25$ ,  $\sigma=0.05$ ,  $\lambda=0.00$  (β)  $R_s=0.40$ ,  $\sigma=0.05$ ,  $\lambda=0.00$  (γ)  $R_s=0.30$ ,  $\sigma=0.05$ ,  $\lambda=0.00$  (δ)  $R_s=0.30$ ,  $\sigma=0.20$ ,  $\lambda=0.00$  (ε)  $R_s=0.30$ ,  $\sigma=0.15$ ,  $\lambda=0.00$  (στ)  $R_s=0.30$ ,  $\sigma=0.15$ ,  $\lambda=0.25$**

### 3.6.6 Παραμορφωσιακή κράτυνση

Πολλά συστήματα παρουσιάζουν παραμορφωσιακή κράτυνση (strain hardening) υποβαλλόμενα σε μεγάλες παραμορφώσεις. Για να συμπεριληφθεί αυτό το φαινόμενο στο

προσομοίωμα, οι Sivaselvan και Reinhorn προτείνουν την παράλληλη σύνδεση ενός εξειδικευμένου ελατηρίου, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.6.11.



Εικόνα 3.6.11: Προσθήκη ελατηρίου κράτυνσης στο προσομοίωμα Sivaselvan – Reinhorn [46]

Η δυσκαμψία του ελατηρίου κράτυνσης δίνεται από την σχέση:

$$K_4 = \kappa K_0 N_{gap} (|\varphi| - \varphi_{gap})^{N_{gap}-1} U(|\varphi| - \varphi_{gap}) \quad (3.6.39)$$

όπου:

- $\varphi_{gap}$  η καμπυλότητα που αντιστοιχεί στην έναρξη του φαινομένου,
- $U(x)$  η συνάρτηση Heaviside όπως ορίστηκε με την σχέση (3.6.23),
- $\kappa, N_{gap}$  παράμετροι κράτυνσης.

Η ροπή που αναλαμβάνεται από το ελατήριο κράτυνσης συμβολίζεται με  $M^{**}$  και δίνεται από την σχέση:

$$M^{**} = K_4 \varphi = \left( \kappa K_0 N_{gap} \left( |\varphi| - \varphi_{gap} \right)^{N_{gap}-1} U \left( |\varphi| - \varphi_{gap} \right) \right) \varphi \quad (3.6.40)$$

Σημειώνεται ότι η παραπάνω σχέση παρουσιάζει τυπογραφικό λάθος στο άρθρο [46].

# 4

## Υστερητικό Προσομοίωμα Bouc-Wen





#### 4.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η βασική μορφή του προσομοιώματος Bouc-Wen η οποία χρησιμοποιείται στη συνέχεια της διατριβής. Αναλύεται η επίδραση των παραμέτρων στην απόκριση και την μορφή των υστερητικών βρόχων και διερευνώνται οι συνθήκες κάτω από τις οποίες το προσομοίωμα παρουσιάζει συνεπή μηχανική συμπεριφορά.

Στην συνέχεια, γίνεται επανεξέταση του προσομοιώματος από μαθηματικής άποψης. Παρουσιάζονται νέες αναλυτικές σχέσεις τόσο για την υστερητική απόκριση όσο και για την αναλίσκόμενη ενέργεια υπό συμμετρική ανακυκλιζόμενη φόρτιση. Οι σχέσεις βασίζονται στην υπεργεωμετρική συνάρτηση του Gauss [56] και παρέχουν πολλαπλά οφέλη. Επιπλέον, παράγονται απλές προσεγγιστικές σχέσεις για τον υπολογισμό της αναλίσκόμενης ενέργειας οι οποίες παρουσιάζουν επαρκή ακρίβεια. Παρουσιάζονται παραμετρικές μελέτες σχετικά με (α) την αναλίσκόμενη ενέργεια του προσομοιώματος κατά έναν πλήρη υστερητικό βρόχο και (β) το σφάλμα των προσεγγιστικών σχέσεων και του απλού διγραμμικού προσομοιώματος σε σχέση με τις ακριβείς αναλυτικές εξισώσεις.

Στην συνέχεια, παρουσιάζεται μια σειρά από μειονεκτήματα τα οποία χαρακτηρίζουν το προσομοίωμα Bouc-Wen. Βασικότερο εξ' αυτών είναι η τοπική παραβίαση των αρχών της πλαστικότητας του Drucker και του Il'iushin, η οποία οδηγεί σε μη φυσική συμπεριφορά του προσομοιώματος κατά την διάρκεια σύντομων κύκλων φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης. Παρουσιάζονται νέες αναλυτικές σχέσεις οι οποίες ποσοτικοποιούν το εύρος των παραβιάσεων και της μη φυσικής συμπεριφοράς.

Προς αντιμετώπιση των προαναφερθέντων προβλημάτων, προτείνεται μια αποτελεσματική τροποποίηση του προσομοιώματος Bouc-Wen. Αποδεικνύεται ότι η προτεινόμενη τροποποίηση διορθώνει πλήρως την μη φυσική συμπεριφορά του προσομοιώματος στην περίπτωση σύντομων κύκλων φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης χωρίς να επηρεάζει την απόκριση σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Στην

συνέχεια, δείχνεται ότι η απόκριση του αρχικού και του τροποποιημένου προσομοιώματος μπορεί να παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στην περίπτωση σεισμικής διέγερσης.

## 4.2 Χρησιμοποιηθέν προσομοίωμα

### 4.2.1 Μαθηματική διατύπωση

Στην παρούσα διατριβή, ως βασικό υστερητικό προσομοίωμα θα χρησιμοποιηθεί μια ισοδύναμη μορφή των εξισώσεων (3.3.1) η οποία δεν περιλαμβάνει φαινόμενα μείωσης της αντοχής, μείωσης της δυσκαμψίας ή στένωσης. Ο λόγος για την χρήση του βασικού προσομοιώματος είναι ότι οι μεθοδολογίες ανάλυσης που θα παρουσιαστούν στα επόμενα κεφάλαια εστιάζουν στο υστερητικό ελατήριο μόνον και συνεπώς η χρήση απλών εκφράσεων διευκολύνει ιδιαίτερα. Τα αποτελέσματα και συμπεράσματα που προκύπτουν μπορούν να επεκταθούν εύκολα σε πιο σύνθετα προσομοιώματα.

Στην περίπτωση ενός μονοβάθμιου συστήματος, η δύναμη επαναφοράς μπορεί να εκφραστεί ως:

$$F(t) = a \frac{F_y}{u_y} u(t) + (1-a) F_y z(t) \quad (4.2.1)$$

όπου:

- $F(t)$  η δύναμη επαναφοράς,
- $u(t)$  η μετατόπιση,
- $a$  ο λόγος της μετελαστικής δυσκαμψίας προς την αρχική δυσκαμψία,
- $F_y$  η «δύναμη διαρροής»,
- $u_y$  η «μετατόπιση διαρροής»,
- $z(t)$  μια αδιάστατη υστερητική παράμετρος, η οποία ακολουθεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση με μηδενική αρχική συνθήκη:

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{u_y} \left[ A - |z(t)|^n \left( \gamma \operatorname{sgn}(\dot{u}(t) z(t)) + \beta \right) \right] \dot{u}(t) \quad (4.2.2)$$

όπου:

- $A, \beta, \gamma$  αδιάστατες παράμετροι που καθορίζουν την μορφή και το μέγεθος των υστερητικών βρόχων,
- $n$  αδιάστατη εκθετική παράμετρος που ελέγχει την μετάβαση του υστερητικού ελατηρίου από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο,
- $\operatorname{sgn}(\cdot)$  η συνάρτηση signum, η οποία επιστρέφει 1, -1 ή 0 όταν το όρισμα είναι θετικός αριθμός, αρνητικός αριθμός ή μηδέν, αντίστοιχα,
- $(\dot{\cdot})$  το σύμβολο της παραγωγίσις ως προς τον χρόνο.

Οι βασικές διαφορές των εξισώσεων (4.2.1) και (4.2.2) σε σχέση με τις εξισώσεις (3.3.1) μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- Η υστερητική παράμετρος  $z(t)$  είναι αδιάστατη,
- Γίνεται χρήση των ποσοτήτων  $F_y$  και  $u_y$ , δηλαδή των συντεταγμένων του «σημείου διαρροής»,
- Οι παράμετροι  $\beta$  και  $\gamma$  έχουν αντιμετατεθεί.

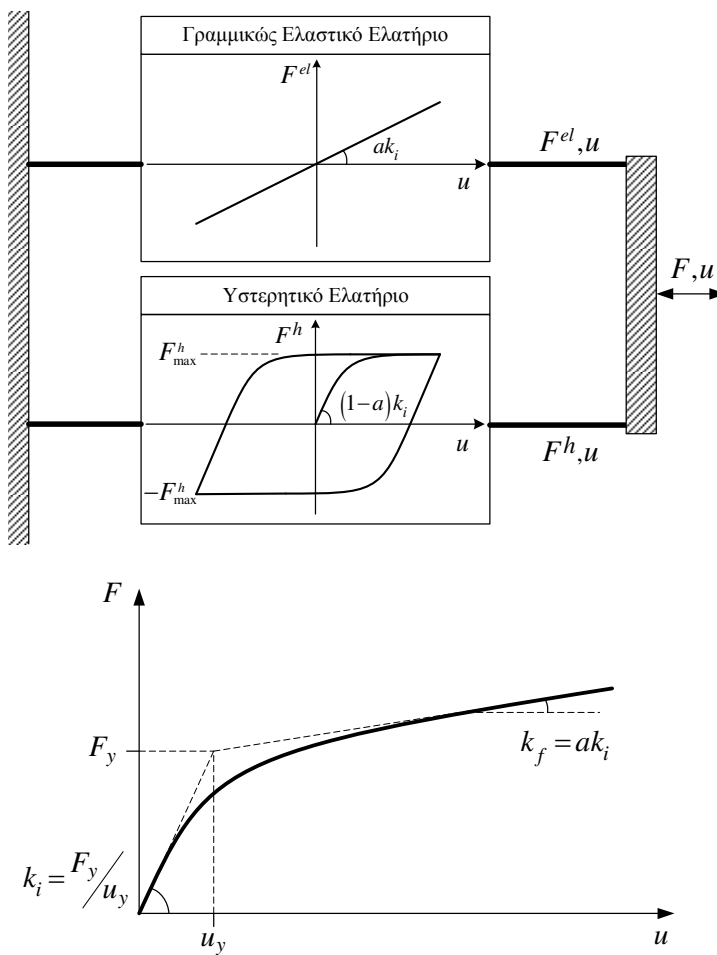
Με βάση την σχέση (4.2.1), η δύναμη επαναφοράς μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα μιας γραμμικώς ελαστικής και μιας υστερητικής δύναμης ως εξής:

$$F^{el}(t) = a \frac{F_y}{u_y} u(t) \quad (4.2.3)$$

$$F^h(t) = (1-a) F_y z(t) \quad (4.2.4)$$

Συνεπώς, το προσομοίωμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σύστημα δύο ελατηρίων συνδεδεμένων παράλληλα (Εικόνα 4.2.1), όπου  $k_i = F_y/u_y$  και  $k_f = a k_i$  είναι η αρχική και

η μετελαστική δυσκαμψία του συστήματος, αντίστοιχα. Οι γωνίες που έχουν σημειωθεί στην εικόνα προκύπτουν ως τόξο εφαπτομένης της αντίστοιχης δυσκαμψίας.



Εικόνα 4.2.1: Μονοβάθμιο προσομοίωμα Bouc-Wen

#### 4.2.2 Περιορισμοί παραμέτρων

Πρόσφατα, οι Ma et al. [62], βασιζόμενοι σε προγενέστερη εργασία των Ni et al. [113], επανεξέτασαν το προσομοίωμα Bouc-Wen και αποφάνθηκαν ότι οι παράμετροι είναι εξαρτώμενες μεταξύ τους. Πρακτικά, υπάρχει μια απειρία ομάδων παραμέτρων για τις οποίες το προσομοίωμα παρουσιάζει την ίδια απόκριση όταν υποβάλλεται σε μια δεδομένη φόρτιση.

Από μαθηματικής άποψης, η αοριστία αυτή μπορεί να αρθεί με την απλοποίηση μιας εκ διαφόρων παραμέτρων του προσομοιώματος [62]. Από φυσικής άποψης όμως, μόνον η παγίωση της παραμέτρου  $A$  στην τιμή της μονάδας είναι αποδεκτή αλλά και επιβεβλημένη. Ο λόγος είναι ότι διασφαλίζεται από φυσικής άποψης η συνέπεια των παραμέτρων που σχετίζονται με την αρχική δυσκαμψία. Πράγματι, μπορεί να δειχτεί ότι η πραγματική (δηλαδή η παρατηρούμενη) αρχική δυσκαμψία ενός συστήματος δίνεται από την σχέση:

$$k_i^* = a \frac{F_y}{u_y} + (1-a) \frac{F_y}{u_y} A \quad (4.2.5)$$

Για να αποδειχθεί η (4.2.5), κατ' αρχήν παρατηρείται ότι η αρχική συνθήκη της παραμέτρου  $z$  είναι μηδέν. Συνεπώς, από την σχέση (4.2.2) προκύπτει ότι για  $t = 0$ :

$$\left. \frac{dz}{du} \right|_{t=0} = \frac{A}{u_y} \quad (4.2.6)$$

Επίσης, από την σχέση (4.2.1) προκύπτει:

$$\frac{dF}{du} = a \frac{F_y}{u_y} + (1-a) F_y \frac{dz}{du} \quad (4.2.7)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.2.6) και (4.2.7) προκύπτει:

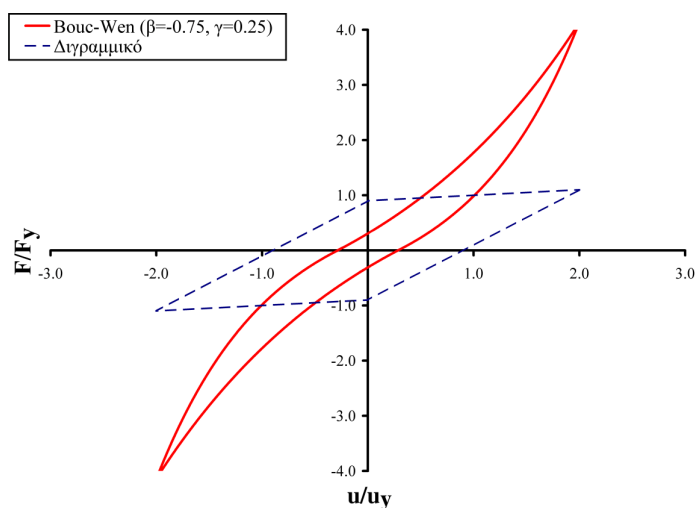
$$\left. \frac{dF}{du} \right|_{t=0} = k_i^* = a \frac{F_y}{u_y} + (1-a) \frac{F_y}{u_y} A \quad (4.2.8)$$

Από την σχέση (4.2.8) είναι φανερό ότι η πραγματική αρχική δυσκαμψία  $k_i^*$  του συστήματος γίνεται ίση με την «φυσικώς» εννοούμενη αρχική δυσκαμψία  $k_i = F_y/u_y$  όταν και μόνον όταν η παράμετρος  $A$  είναι ίση με την μονάδα:

$$A = 1 \quad (4.2.9)$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η αυθεντική μορφή των εξισώσεων, δηλαδή οι εξισώσεις (3.3.1), η παράμετρος  $A$  θα πρέπει να είναι ίση με την πραγματική αρχική δυσκαμψία του συστήματος.

Είναι επίσης γνωστό ότι το προσομοίωμα είναι σε θέση να παράγει υστερητικούς βρόχους με παραμορφωσιακή κράτυνση. Αυτό επιτυγχάνεται με χρήση κατάλληλων τιμών των παραμέτρων  $\beta$  και  $\gamma$ , όπως δείχθηκε από τον Wen [1]. Σημειώνεται όμως ότι οι παράμετροι  $\beta$  και  $\gamma$  δεν έχουν φυσική υπόσταση και επηρεάζουν την συνολική απόκριση με έναν μη ελεγχόμενο τρόπο. Για να αναδειχθεί το σημείο αυτό, στις εικόνες που ακολουθούν έχει σχεδιαστεί τόσο η απόκριση του προσομοιώματος Bouc-Wen όσο και η απόκριση του αντίστοιχου διγραμμικού προσομοιώματος με παραμέτρους  $F_y$ ,  $u_y$ ,  $a$ , ως βάση αναφοράς. Η Εικόνα 4.2.2 παρουσιάζει ένα παράδειγμα από το άρθρο [1]:



Εικόνα 4.2.2: Υστερητικός βρόχος ( $\beta=-0.75$ ,  $\gamma=0.25$ ,  $\alpha=0.10$ ,  $n=1$ ,  $u_{max}/u_y=2$ )

Είναι φανερό ότι η απόκριση του προσομοιώματος Bouc-Wen βρίσκεται σε μεγάλη απόκλιση από αυτήν του διγραμμικού προσομοιώματος. Συνεπώς, δεν δικαιολογείται η ονομασία παραμέτρων όπως «δύναμη διαρροής», «παραμόρφωση διαρροής» κ.λ.π. Αντίθετα, σύμφωνα με μελέτες των Constantinou και Adnane [110], ο περιορισμός

$A/(\beta + \gamma) = 1$  δημιουργεί ένα προσομοίωμα χωρίς παραμορφωσιακή κράτυνση, το οποίο όμως παρουσιάζει καλές μηχανικές ιδιότητες.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε ένα ελαστικό – πλήρως πλαστικό σύστημα ( $a = 0$ ) υπό μονοτονική φόρτιση, τότε η πραγματική (δηλαδή η παρατηρούμενη) δύναμη διαρροής του συστήματος θα δίνεται με βάση την σχέση (4.2.1) ως:

$$F_y^* = F_y z_{\max} \quad (4.2.10)$$

Είναι φανερό ότι η πραγματική δύναμη διαρροής  $F_y^*$  του συστήματος είναι ίση με την «φυσικώς» εννοούμενη δύναμη διαρροής  $F_y$  όταν και μόνον όταν (α) η υστερητική παράμετρος  $z$  παρουσιάζει κάποια μέγιστη τιμή (δηλαδή η εξίσωση  $\dot{z} = 0$  έχει πραγματική λύση) και (β) η μέγιστη αυτή τιμή είναι ίση με την μονάδα.

Οι ακραίες τιμές της υστερητικής παραμέτρου  $z$  προκύπτουν αν θέσουμε  $\dot{z} = 0$  στην εξίσωση (4.2.2), οπότε προκύπτει:

$$z_{ext} = \pm \left( \frac{A}{\beta + \gamma} \right)^{1/n} \quad (4.2.11)$$

Η παραπάνω σχέση ορίζεται για κάθε  $n > 0$  όταν και μόνον όταν  $A/(\beta + \gamma) > 0$ . Αυτή είναι η απαραίτητη και ικανή συνθήκη για να παρουσιάζει το σύστημα παραμορφωσιακή χαλάρωση. Η παρακάτω Εικόνα 4.2.3 παρουσιάζει ένα παράδειγμα από το άρθρο [1] το οποίο εμπίπτει σε αυτή την περίπτωση. Παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου, η οποία υπολογίζεται από την σχέση (4.2.11), δεν είναι ίση με την μονάδα. Ως αποτέλεσμα, η απόκριση του προσομοιώματος Bouc-Wen παρουσιάζει απόκλιση από αυτήν του αντίστοιχου διγραμμικού προσομοιώματος.

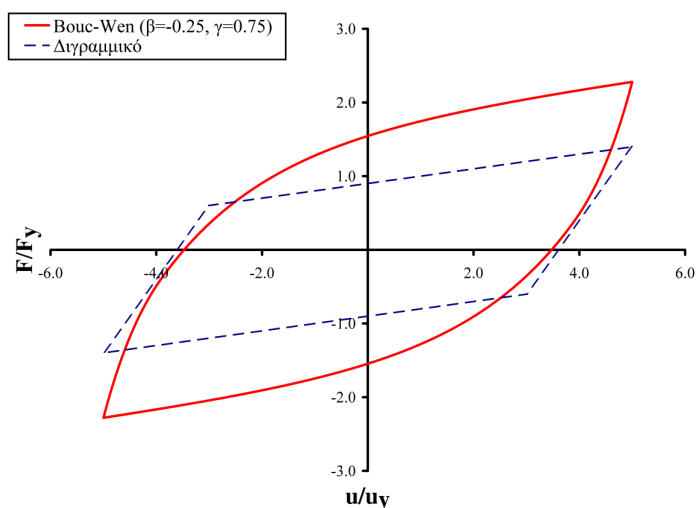
Αν απαιτήσουμε η μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου να είναι ίση με την μονάδα για κάθε  $n$ , τότε με βάση την σχέση (4.2.11) προκύπτει η σχέση που προτείνουν οι Constantinou και Adnane [110]:

$$\frac{A}{\beta + \gamma} = 1 \quad (4.2.12)$$

Τελικά, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $A = 1$ , προκύπτει ο δεύτερος περιορισμός:

$$\beta + \gamma = 1 \quad (4.2.13)$$

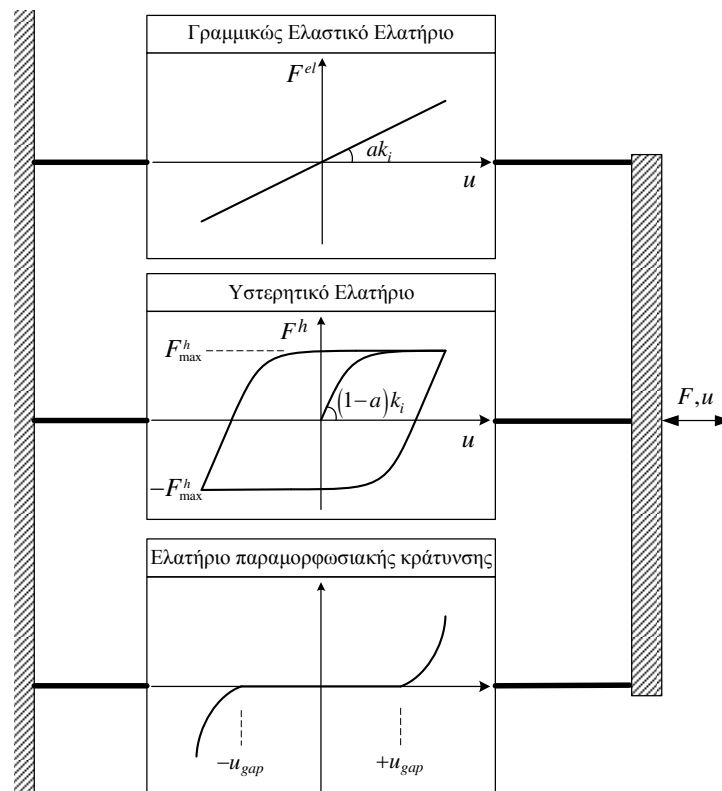
Με βάση τα παραπάνω, η υστερητική παράμετρος  $z$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $[-1,1]$ . Η παραμορφωσιακή κράτυνση μπορεί να αντιμετωπιστεί με πιο αποτελεσματικές μεθόδους, όπως με την χρήση ενός εξειδικευμένου ελατηρίου συνδεδεμένου παράλληλα με τα ελατήρια του προσομοιώματος Bouc-Wen, όπως προτάθηκε από τους Sivaselvan και Reinhorn [46] (Εικόνα 4.2.4). Η συμπεριφορά του εξειδικευμένου αυτού ελατηρίου μπορεί να διέπεται από κατάλληλες μαθηματικές εκφράσεις και παραμέτρους οι οποίες έχουν φυσική υπόσταση, όπως για παράδειγμα η μετατόπιση μετά την οποία εμφανίζεται η παραμορφωσιακή κράτυνση (§3.6.6).



**Εικόνα 4.2.3: Υστερητικός βρόχος ( $\beta=-0.25$ ,  $\gamma=0.75$ ,  $\alpha=0.10$ ,  $n=1$ ,  $u_{\max}/u_y=5$ )**

Στην παρούσα διατριβή, οι σχέσεις (4.2.9) και (4.2.13) θεωρείται ότι ισχύουν χωρίς περαιτέρω αναφορά. Η μορφή της απόκρισης που φαίνεται στην Εικόνα 4.2.1 λαμβάνεται με εφαρμογή αυτών των δύο περιορισμών.





Εικόνα 4.2.4: Προσομοίωμα Bouc-Wen με παραμορφωσιακή κράτυνση

### 4.2.3 Παράμετροι $\beta$ και $\gamma$

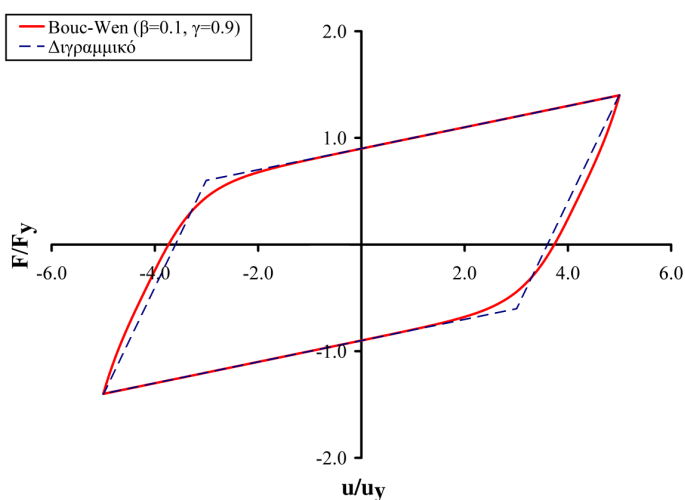
Οι παράμετροι  $\beta$  και  $\gamma$  καθορίζουν την μορφή των υστερητικών βρόχων. Αν και δεν επιβάλλεται ρητά στην παρούσα διατριβή, απαιτήσεις θερμοδυναμικής φύσεως επιβάλλουν τον παρακάτω περιορισμό [58]:

$$\gamma \geq \beta \quad (4.2.14)$$

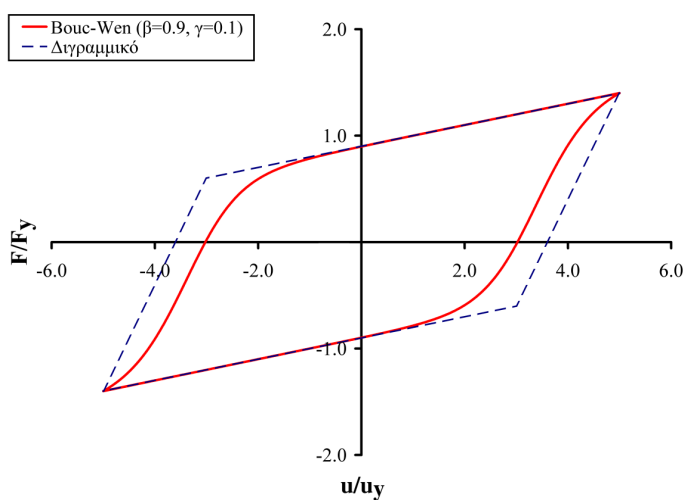
Σημειώνεται ότι η σχέση (4.2.14) προκύπτει με αντιμετάθεση των παραμέτρων  $\beta$  και  $\gamma$  σε σχέση με το άρθρο [58], λόγω διαφορετικής μαθηματικής διατύπωσης.

Εάν η σχέση (4.2.14) ισχύει, τότε η μορφή των υστερητικών βρόχων είναι ελλειψοειδής. Σε αντίθετη περίπτωση, οι βρόχοι παίρνουν μορφή "S". Στην ειδική περίπτωση που  $\beta = \gamma = 0.5$ , οι κλάδοι αποφόρτισης είναι ευθείες γραμμές με κλίση  $F_y/u_y$ . Οι υστερητικοί

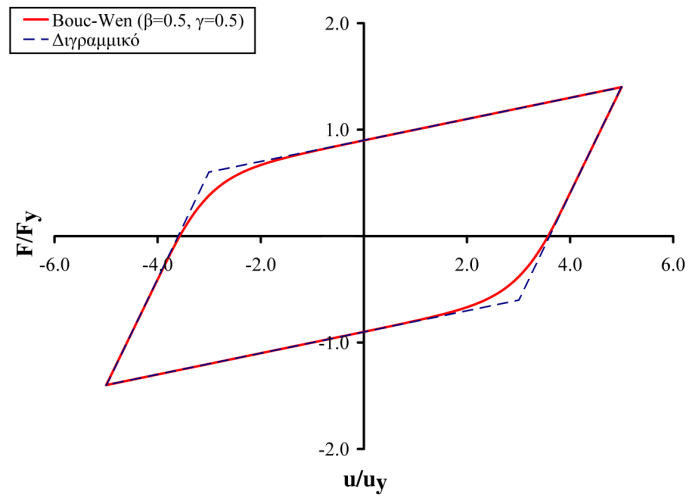
βρόχοι που αντιστοιχούν στις τρεις αυτές περιπτώσεις, καθώς και το αντίστοιχο διγραμμικό προσομοίωμα, παρουσιάζονται στις παρακάτω εικόνες όπου  $a = 0.10$ ,  $n = 2.0$  και  $u_{max}/u_y = 5.0$ . Σημειώνεται ότι και στις τρεις περιπτώσεις η φόρτιση προς οποιαδήποτε κατεύθυνση οδηγεί την καμπύλη απόκρισης του προσομοιώματος Bouc-Wen ασυμπτωτικά προς την απόκριση του αντίστοιχου διγραμμικού προσομοιώματος. Η επιθυμητή αυτή συμπεριφορά οφείλεται στους επιβαλλόμενους περιορισμούς της §4.2.2.



Εικόνα 4.2.5: Υστερητικός βρόχος ( $\beta=0.1$ ,  $\gamma=0.9$ ,  $a=0.10$ ,  $n=2$ ,  $u_{max}/u_y=5$ )



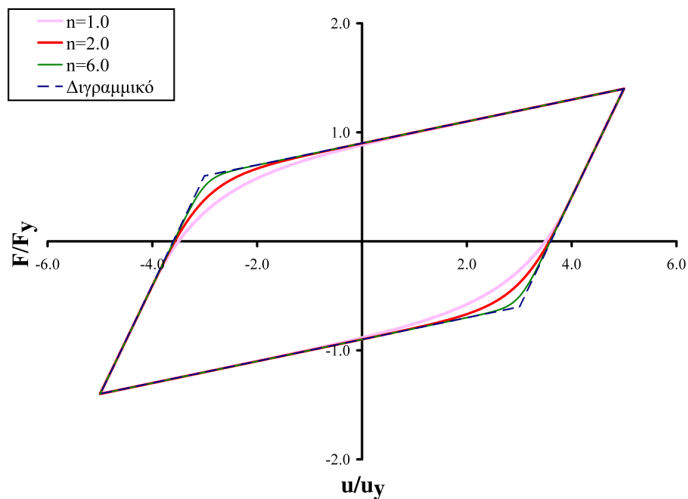
Εικόνα 4.2.6: Υστερητικός βρόχος ( $\beta=0.9$ ,  $\gamma=0.1$ ,  $a=0.10$ ,  $n=2$ ,  $u_{max}/u_y=5$ )



Εικόνα 4.2.7: Υστερητικός βρόχος ( $\beta=\gamma=0.5$ ,  $\alpha=0.10$ ,  $n=2$ ,  $u_{max}/u_y=5$ )

#### 4.2.4 Εκθετική παράμετρος $n$

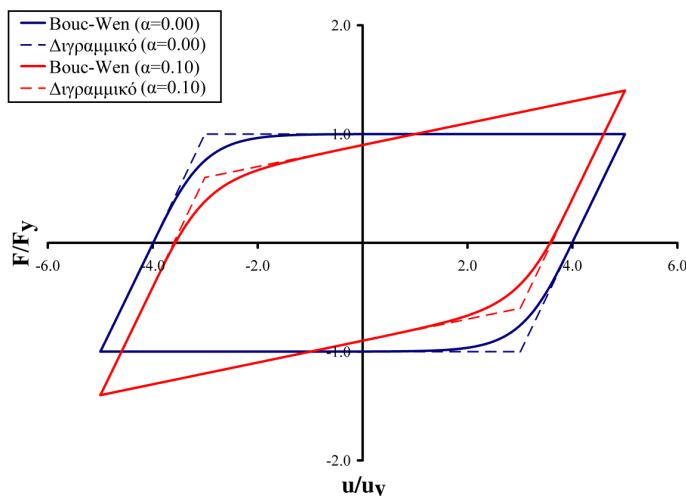
Η εκθετική παράμετρος  $n$  καθορίζει το πόσο απότομη είναι η μετάβαση του υστερητικού ελατηρίου από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο. Στην Εικόνα 4.2.8 φαίνονται οι υστερητικοί βρόχοι που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της παραμέτρου  $n$ . Είναι φανερό ότι για μεγάλες τιμές της παραμέτρου το προσομοίωμα Bouc-Wen προσομοιάζει το διγραμμικό.



Εικόνα 4.2.8: Επίδραση εκθετικής παραμέτρου  $n$  ( $\beta=\gamma=0.5$ ,  $\alpha=0.10$ ,  $u_{max}/u_y=5$ )

#### 4.2.5 Παράμετρος $\alpha$

Η παράμετρος  $\alpha$  αναπαριστά τον λόγο της μετελαστικής δυσκαμψίας του συστήματος προς την αρχική δυσκαμψία. Στην παρακάτω Εικόνα 4.2.9 φαίνεται η απόκριση ενός συστήματος για  $\alpha = 0$  και  $\alpha = 0.10$  καθώς και η απόκριση των αντίστοιχων διγραμμικών προσομοιωμάτων.

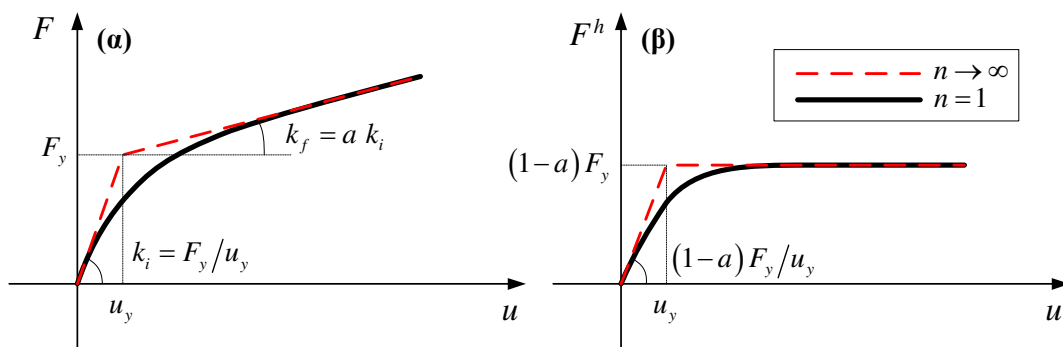


Εικόνα 4.2.9: Επίδραση παραμέτρου  $\alpha$  ( $\beta=\gamma=0.5$ ,  $n=2$ ,  $u_{\max}/u_y=5$ )

#### 4.2.6 Σημείο διαρροής ( $u_y, F_y$ )

Στην Εικόνα 4.2.10 φαίνεται η απόκριση κατά την μονοτονική φόρτιση ενός συστήματος για  $n = 1$  και  $n \rightarrow \infty$  ( $\alpha > 0$ ). Οι γωνίες που έχουν σημειωθεί στην εικόνα προκύπτουν ως τόξο εφαπτομένης της αντίστοιχης δυσκαμψίας.

Ένα θέμα το οποίο χρήζει ιδιαίτερης προσοχής είναι ότι, κατά την μονοτονική φόρτιση, το διάγραμμα δύναμης – μετατόπισης γενικά *δεν περιλαμβάνει το «σημείο διαρροής»* με συντεταγμένες  $(u_y, F_y)$ . Όπως είναι φανερό από την Εικόνα 4.2.10α, η μόνη περίπτωση που αυτό συμβαίνει είναι όταν η εκθετική παράμετρος  $n$  παίρνει πολύ μεγάλες τιμές (πρακτικά, μεγαλύτερες του 5).



Εικόνα 4.2.10: Απόκριση σε μονοτονική φόρτιση (α) συνολική (β) υστερητικού ελατηρίου

Συνεπώς, στην περίπτωση του προσομοιώματος Bouc-Wen, ο όρος «σημείο διαρροής» δεν αντιστοιχεί κατ' ανάγκη στο σαφώς ορισμένο σημείο διαρροής το οποίο ενδεχομένως να εμφανίζει κάποιο υλικό ή κατασκευή κατά την διεξαγωγή ενός πειράματος. Έτσι, η πληροφορία του σημείου διαρροής γενικά δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των τιμών των παραμέτρων  $u_y$ ,  $F_y$ . Αντίθετα, απαιτείται η εφαρμογή ειδικών μεθόδων ταυτοποίησης παραμέτρων, όπως αναλύεται στο Κεφάλαιο 5.

#### 4.2.7 Ιξώδης απόσβεση

Πέρα από την υστερητική απόσβεση του προσομοιώματος Bouc-Wen, μπορεί να ληφθεί υπόψη και απόσβεση ιξώδους φύσης. Αυτό επιτυγχάνεται με την προσθήκη ενός κατάλληλου όρου στην εξίσωση κίνησης και ισοδυναμεί με παράλληλη σύνδεση ενός αποσβεστήρα (dashpot) με τα ελατήρια του προσομοιώματος Bouc-Wen (Εικόνα 4.2.11).

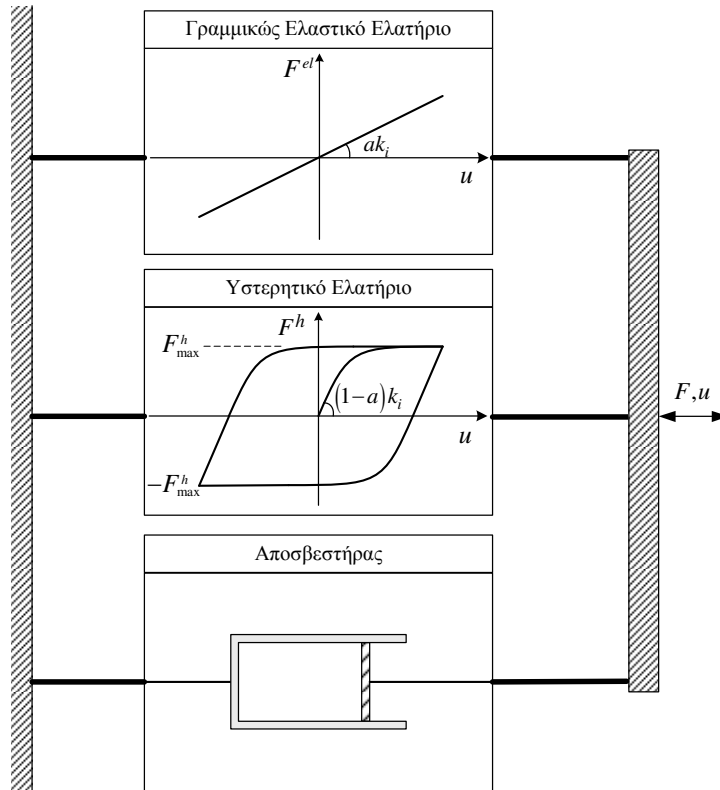
Στην περίπτωση χρήσης γραμμικού συντελεστή ιξώδους απόσβεσης, η εξίσωση κίνησης ενός μονοβάθμιου συστήματος διαμορφώνεται ως:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + F(u) = f(t) \quad (4.2.15)$$

όπου:

- ο  $m$  η μάζα του συστήματος,

- ο  $u$  η μετατόπιση,
- ο  $c$  ο γραμμικός συντελεστής ιξώδους απόσβεσης,
- ο  $F(t)$  η δύναμη επαναφοράς του προσομοιώματος Bouc-Wen,
- ο  $f(t)$  η δύναμη διέγερσης.



Εικόνα 4.2.11: Προσομοίωμα Bouc-Wen με παράλληλη σύνδεση ιξώδους αποσβεστήρα

### 4.3 Απόκριση και αναλίσκόμενη ενέργεια

#### 4.3.1 Διατύπωση του προβλήματος

Ο υπολογισμός της απόκρισης και της αναλίσκόμενης ενέργειας είναι θέμα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος. Η απόκριση συνήθως υπολογίζεται με αριθμητικές μεθόδους βήμα-προς-βήμα στα πλαίσια της επίλυσης της εξίσωσης της κίνησης. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να ληφθούν υπόψη και φαινόμενα ιξώδους φύσης. Εξ' ορισμού όμως, η υστερητική απόκριση

είναι ανεξάρτητη του ρυθμού επιβολής της μετατόπισης [2]. Επίσης, για ένα πλήθος εφαρμογών, όπως για παράδειγμα στα συστήματα σεισμικής μόνωσης, τα φαινόμενα ιξώδους φύσης είναι ασήμαντα και μπορούν να αγνοηθούν [67].

Με βάση την διαφορική εξίσωση της υστερητικής παραμέτρου  $z$ , γίνεται επανεξέταση του προσομοιώματος Bouc-Wen από μαθηματικής άποψης. Παρουσιάζονται αναλυτικές σχέσεις τόσο για την υστερητική απόκριση όσο και για την αναλίσκόμενη ενέργεια υπό συμμετρική ανακυκλιζόμενη φόρτιση [57].

#### 4.3.2 Επισκόπηση υφιστάμενου ερευνητικού έργου

Στην βιβλιογραφία δεν φαίνεται να υπάρχει κάποια συστηματική μελέτη η οποία να παρουσιάζει αναλυτικές σχέσεις για την απόκριση και την αναλίσκόμενη ενέργεια του προσομοιώματος Bouc-Wen.

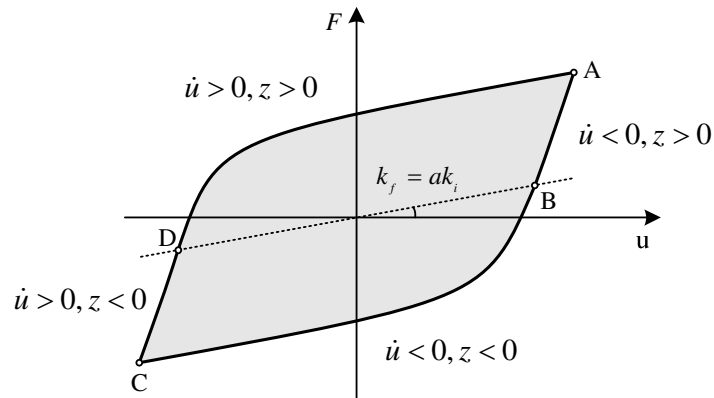
Για το απλούστερο προσομοίωμα του Bouc (όπου δεν υπάρχει εκθετική παράμετρος), μελέτες του ίδιου του Bouc [9] παρουσιάζουν την απόκριση και την αναλίσκόμενη ενέργεια στην ειδική περίπτωση χρήσης πυρήνα εκθετικού πολυωνύμου (§3.2.3).

#### 4.3.3 Απόκριση

Για λόγους απλότητας, θεωρούμε το βασικό μονοβάθμιο προσομοίωμα Bouc-Wen το οποίο παρουσιάστηκε στην §4.1. Η μεθοδολογία που θα αναπτυχθεί στο παρόν κεφάλαιο αφορά την υστερητική απόκριση και η ανάλυση εστιάζεται στο υστερητικό ελατήριο μόνον. Συνεπώς, η μεθοδολογία βρίσκει εφαρμογή σχεδόν αυτούσια και σε πιο σύνθετα προσομοιώματα.

Η συμπεριφορά του προσομοιώματος Bouc-Wen μπορεί να κατηγοριοποιηθεί με βάση το πρόσημο των  $\dot{u}$  και  $z$  σε τέσσερις υποπεριπτώσεις. Στην Εικόνα 4.3.1 φαίνεται η απόκριση (σε σταθερή κατάσταση) ενός συστήματος υποβαλλόμενου σε συμμετρική ανακυκλιζόμενη φόρτιση. Η διακεκομμένη γραμμή υποδεικνύει την απόκριση του γραμμικώς ελαστικού ελατηρίου. Στα σημεία  $A$  και  $C$  παρουσιάζεται αλλαγή πρόσημου της ταχύτητας  $\dot{u}$ , ενώ

στα σημεία  $B$  και  $D$  παρουσιάζεται αλλαγή πρόσημου της υστερητικής δύναμης  $F^h$  ή ισοδύναμα της υστερητικής παραμέτρου  $z \in [-1,1]$ . Ο υπολογισμός της απόκρισής του γραμμικώς ελαστικού ελατηρίου είναι τετριμμένος και συνεπώς η παρούσα μελέτη εστιάζεται στο υστερητικό ελατήριο.



**Εικόνα 4.3.1: Απόκριση προσομοιώματος Bouc-Wen υπό συμμετρική ανακυκλιζόμενη φόρτιση**

Στην μη τετριμμένη περίπτωση όπου  $\beta \neq \gamma$  και με απαλοιφή του χρόνου, η εξίσωση (4.2.2) μπορεί να γραφτεί με την μορφή:

$$du = \frac{u_y}{1 - |z|^n (\beta + \text{sgn}(\dot{u}z)\gamma)} dz \quad (4.3.1)$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα της (4.3.1) μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά με όρους της υπεργεωμετρικής συνάρτησης  ${}_2F_1(a, b, c; w)$  του Gauss [40]. Λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες, η εξίσωση (4.3.1) παίρνει την μορφή:

$$\frac{u - u_0}{u_y} = z {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; q|z|^n\right) \Bigg|_{z_0}^z \quad (4.3.2)$$

όπου:

- ο  $q = \beta + \text{sgn}(\dot{u}z)\gamma$  συντελεστής που θεωρείται σταθερός κατά την θεωρούμενη μεταβολή του συστήματος,



- $u_0$  η αρχική τιμή της μετατόπισης,
- $z_0$  η αρχική τιμή της υστερητικής παραμέτρου.

Η εξίσωση (4.3.2) ισχύει για κάθε τιμή των παραμέτρων  $n$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ , αρκεί η τιμή του  $q$  να παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια της θεωρούμενης μεταβολής του συστήματος. Επιπλέον, μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά ως προς  $z$  για δεδομένες τιμές της εκθετικής παραμέτρου  $n$ . Για  $n = 1$  προκύπτει:

$$z = \frac{\operatorname{sgn}(z) + (q z_0 - \operatorname{sgn}(z)) e^{\frac{\operatorname{sgn}(z)q(u-u_0)}{u_y}}}{q} \quad (4.3.3)$$

Για  $n = 2$  προκύπτει:

$$z = \frac{\tanh\left(\sqrt{q}(u-u_0)/u_y + \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{q} z_0\right)\right)}{\sqrt{q}} \quad (4.3.4)$$

όπου:

- $\tanh(\bullet)$  η υπερβολική εφαπτομένη,
- $\operatorname{arctanh}(\bullet)$  το τόξο υπερβολικής εφαπτομένης.

Σημειώνεται ότι στην εξίσωση (4.3.4) ο όρος  $\sqrt{q}$  μπορεί να είναι μιγαδικός, όμως το αποτέλεσμα είναι πραγματικός αριθμός ως προς  $z$ . Οι παραπάνω εξισώσεις εφαρμόζονται κατά τμήματα, έτσι ώστε η τιμή του  $q$  να παραμένει σταθερή. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στις τιμές των πρόσημων και το πεδίο ορισμού της υστερητικής παραμέτρου  $z$  ανά τμήμα (Πίνακας 4.3.1).

Για αυθαίρετες τιμές της εκθετικής παραμέτρου  $n$ , η εξίσωση (4.3.2) πρέπει να επιλυθεί με αριθμητικές μεθόδους. Από την εξίσωση (4.3.1) προκύπτει ότι, τουλάχιστον όταν  $\gamma \in (0, 1]$ , η υστερητική παράμετρος  $z$  είναι συνεχής και αυστηρά μονότονη συνάρτηση της μετατόπισης  $u$ . Έτσι, εάν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης (4.3.2) στο αντίστοιχο πεδίο ορισμού (Πίνακας 4.3.1), τότε αυτή είναι μοναδική. Η ρίζα μπορεί να προσδιοριστεί με πολύ εύκολο

και αποδοτικό τρόπο με χρήση του θεωρήματος Bolzano – Weierstrass [66] και τεχνικές διχοτόμησης διαστημάτων. Η μέθοδος Van Wijngaarden – Dekker – Brent [65], η οποία συνδυάζει διχοτόμηση (bisection) και αντίστροφη τετραγωνική παρεμβολή (inverse quadratic interpolation) αποτελεί μια πολύ καλή λύση καθώς απαιτεί λίγα βήματα (συνήθως 7 με 10) για να υπολογίσει την άγνωστη υστερητική παράμετρο  $z$  με διπλή ακρίβεια. Σημειώνεται ότι η μέθοδος Brent εγγυάται την εύρεση της ρίζας, εφόσον αυτή έχει φραγεί σε κάποιο διάστημα.

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η υπεργεωμετρική συνάρτηση  ${}_2F_1(a, b, c; w)$  δεν ορίζεται στο σημείο  $w(1, 0)$  του μιγαδικού επιπέδου [40], [65]. Το σημείο αυτό είναι ιδιαίτερης σημασίας καθώς αντιστοιχεί, με βάση τις εξισώσεις (4.2.11) και (4.3.2), σε πλήρη διαρροή του συστήματος. Συνεπώς, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του ορίου της υπεργεωμετρικής συνάρτησης καθώς  $w \rightarrow 1^-$ . Ο υπολογισμός της υπεργεωμετρικής συνάρτησης γενικά, αλλά και ο υπολογισμός του ορίου ειδικότερα, δεν είναι τετριμμένοι και θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατάλληλες τεχνικές, όπως αναλύεται στο Παράρτημα Α.

Τμήμα	$q$	$\text{sgn}(z)$	Πεδίο Ορισμού
$AB$	$\beta - \gamma$	1	$z_0 \in [0, 1], z \in [0, z_0]$
$BC$	1	-1	$z_0 \in (-1, 0], z \in (-1, z_0]$
$CD$	$\beta - \gamma$	-1	$z_0 \in [-1, 0], z \in [z_0, 0]$
$DA$	1	1	$z_0 \in [0, 1), z \in [z_0, 1)$

**Πίνακας 4.3.1: Τιμές πρόσημων και πεδία ορισμού υστερητικής παραμέτρου  $z$**

Κατά την φάση της φόρτισης προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, γίνεται απόπειρα να γίνει φραγή της άγνωστης ρίζας με ακραία τιμή της  $z$  ίσης  $\pm(1 - \varepsilon)$ , όπου  $\varepsilon$  είναι η παράμετρος έψιλον του υπολογιστή. Αν αυτό αποτύχει, τότε το σύστημα έχει διαρρεύσει πλήρως και τίθεται  $z \cong \pm 1$ . Κατά την φάση της αποφόρτισης, εάν δεν μπορεί να γίνει φραγή της ρίζας

τότε υποχρεωτικά υπάρχει αλλαγή τμήματος, δηλαδή από το  $AB$  στο  $BC$  ή από το  $CD$  στο  $DA$ , και η υστερητική παράμετρος  $z$  πρέπει να υπολογιστεί σε δύο βήματα.

Στην ειδική περίπτωση όπου  $\beta = \gamma = 1/2$ , οι κλάδοι αποφόρτισης είναι ευθείες γραμμές και η ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.3.1) δίνει:

$$z = \frac{(u - u_0)}{u_y} + z_0 \quad (4.3.5)$$

Η εξίσωση (4.3.5) είναι ανεξάρτητη της εκθετικής παραμέτρου  $n$ . Οι κλάδοι φόρτισης καλύπτονται από την εξίσωση (4.3.2).

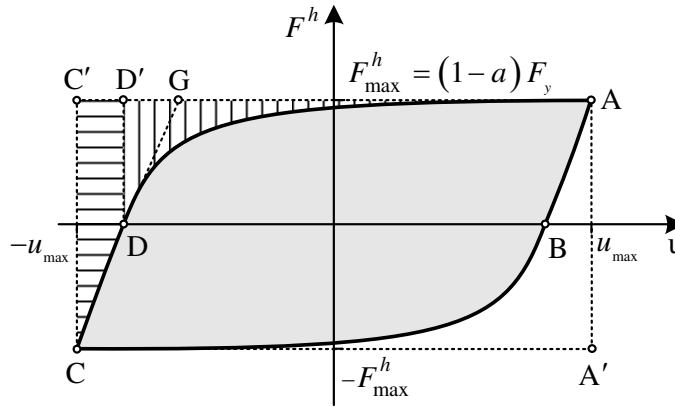
#### 4.3.4 Αναλίσκόμενη ενέργεια

Η αναλίσκόμενη ενέργεια εκφράζεται από το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τους υστερητικούς βρόχους κατά έναν πλήρη κύκλο φόρτισης. Η απόδειξη αυτού βασίζεται στον Πρώτο και τον Δεύτερο Νόμο της Θερμοδυναμικής, με τις επιπλέον υποθέσεις ότι (α) επικρατούν ισοθερμικές συνθήκες και (β) το διάνυσμα των εσωτερικών μεταβλητών κατάστασης (E.M.K.) λαμβάνει την ίδια τιμή στην αρχή και το τέλος του κύκλου [4], [59].

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν αναλυτικές εκφράσεις της αναλίσκόμενης ενέργειας υπό συμμετρική περιοδική φόρτιση τύπου κύματος (symmetric wave T-periodic input) [61]. Αυτού του τύπου οι φορτίσεις είναι ιδιαίτερα διαδεδομένες και περιλαμβάνουν ημιτονοειδείς φορτίσεις, τριγωνικές φορτίσεις κ.λ.π. Αποδεικνύεται ότι η απόκριση υπό περιοδική φόρτιση είναι επίσης, ασυμπτωτικά, περιοδική με την ίδια περίοδο [61].

Το γραμμικώς ελαστικό ελατήριο (Εικόνα 4.2.1) δεν αναλίσκει ενέργεια (γενικά), αλλά ούτε και αποθηκεύει ενέργεια σε ένα κλειστό κύκλο μετατόπισης. Συνεπώς, στην παρούσα ανάλυση θα αγνοηθεί. Στην Εικόνα 4.3.2 φαίνεται η απόκριση του υστερητικού ελατηρίου (σε σταθερή κατάσταση) υπό συμμετρική περιοδική ανακυκλιζόμενη φόρτιση, όπου η μέγιστη μετατόπιση  $u_{\max}$  είναι κοινή και προς τις δύο κατευθύνσεις φόρτισης και  $F_{\max}^h = (1 - a) F_y$  είναι η μέγιστη δυνατή (αλλά όχι απαραίτητα παρατηρούμενη) δύναμη του

υστερητικού ελατηρίου. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, στα σημεία  $A$  και  $C$  παρουσιάζεται αλλαγή πρόσημου της ταχύτητας  $\dot{u}$  ενώ στα σημεία  $B$  και  $D$  παρουσιάζεται αλλαγή πρόσημου της υστερητικής δύναμης  $F^h$  ή, ισοδύναμα, της υστερητικής παραμέτρου  $z \in [-1, 1]$ .



**Εικόνα 4.3.2: Απόκριση υστερητικού ελατηρίου υπό συμμετρική ανακυκλιζόμενη φόρτιση**

Λαμβάνοντας υπόψη την συμμετρία, προκύπτει ότι  $u_A = -u_C = u_{\max}$  και  $z_A = -z_C$ , όπου ο δείκτης υποδεικνύει το αντίστοιχο σημείο του υστερητικού βρόχου. Με βάση τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.3.2) προκύπτει ότι:

$$\frac{u_{\max}}{u_y} = \frac{z_A}{2} \left( {}_2F_1 \left( 1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta - \gamma) z_A^n \right) + {}_2F_1 \left( 1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; z_A^n \right) \right) \quad (4.3.6)$$

όπου,  $z_A$  είναι η άγνωστη μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου  $z$ . Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτουν αναλυτικές εκφράσεις της  $z_A$  για συγκεκριμένες τιμές της εκθετικής παραμέτρου  $n$  και της παράστασης  $(\beta - \gamma)$ . Για παράδειγμα, για  $n = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1$ , προκύπτει ότι:

$$z_A = \frac{-1 + e^{\frac{2u_{\max}}{u_y}}}{1 + e^{\frac{2u_{\max}}{u_y}}} \quad (4.3.7)$$

Για  $n = 1$ ,  $\beta = \gamma = 1/2$ , προκύπτει:

$$z_A = 1 - \text{ProductLog} \left( e^{-2 \frac{u_{\max}}{u_y}} \right) \quad (4.3.8)$$

όπου,  $\text{ProductLog}(z)$  είναι η κύρια λύση της εξίσωσης  $z = we^w$  ως προς  $w$  [63].

Γενικά, όμως, η εξίσωση (4.3.6) πρέπει να επιλυθεί αριθμητικά. Κατ' όμοιο τρόπο, όπως στην προηγούμενη παράγραφο, η μέθοδος Van Wijngaarden – Dekker – Brent [65] συγκλίνει με πάρα πολύ καλό ρυθμό. Αν η φραγή της ρίζας της  $z_A$  στο διάστημα  $[0, 1 - \varepsilon]$  αποτύχει, τότε θεωρείται ότι το σύστημα έχει διαρρεύσει πλήρως και η  $z_A$  τίθεται ίση με την μονάδα.

Η αναλυσόμενη ενέργεια σε έναν πλήρη κύκλο μπορεί να εκφραστεί με βάση την μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου  $z_A$ . Το εμβαδόν της περικλειόμενης επιφανείας δίνεται από την σχέση:

$$E = \oint F^h du \quad (4.3.9)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την συμμετρία, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$E = 2 \int_{u_c}^{u_A} F^h du \quad (4.3.10)$$

Με ολοκλήρωση κατά τμήματα και αλλαγή μεταβλητής προκύπτει:

$$E = 2F_{\max}^h u_y \left( \int_{-z_A}^0 \frac{z}{1 - (-z)^n (\beta - \gamma)} dz + \int_0^{z_A} \frac{z}{1 - z^n} dz \right) \quad (4.3.11)$$

Η σχέση (4.3.11) μπορεί να γραφτεί σε αναλυτική μορφή με όρους υπεργεωμετρικής συνάρτησης ως εξής:

$$E = 2F_{\max}^h u_y (k_{CD} + k_{DA}) \quad (4.3.12)$$

όπου:

$$k_{CD} = -\frac{1}{2} z_A^2 {}_2F_1\left(1, \frac{2}{n}, 1 + \frac{2}{n}; (\beta - \gamma) z_A^n\right) \quad (4.3.13)$$

$$k_{DA} = \frac{1}{2} z_A^2 {}_2F_1\left(1, \frac{2}{n}, 1 + \frac{2}{n}; z_A^n\right) \quad (4.3.14)$$

Οι σχέσεις (4.3.12) ως (4.3.14) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της αναλισκόμενης ενέργειας *μόνον σε περίπτωση μερικής διαρροής του συστήματος*. Στην περίπτωση πλήρους διαρροής οι εξισώσεις δεν είναι ευσταθείς, διότι αφ' ενός η μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου  $z_A$  είναι πολύ κοντά στην μονάδα και δεν μπορεί να υπολογιστεί με επαρκή ακρίβεια και αφ' ετέρου η υπεργεωμετρική συνάρτηση  ${}_2F_1(a, b, c; w)$  δεν ορίζεται για  $w = 1$ .

Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά με χρήση μιας εναλλακτικής μεθόδου που βασίζεται στον υπολογισμό *συμπληρωματικών* εμβαδών, δηλαδή των γραμμοσκιασμένων εμβαδών στην Εικόνα 4.3.2. Η αναλισκόμενη ενέργεια μπορεί να υπολογιστεί αν αφαιρεθούν τα συμπληρωματικά εμβαδά από το εμβαδόν του εξωτερικού παραλληλογράμμου  $AC'CA'$  ως εξής:

$$E = 4F_{\max}^h u_{\max} - 2 \int_{u_c}^{u_A} (F_{\max}^h - F^h) du \quad (4.3.15)$$

Το συμπληρωματικό εμβαδόν για το τμήμα  $CD$  υπολογίζεται ως εξής:

$$E_{\overline{D'CCD}} = F_{\max}^h u_y \int_{-z_A}^0 \frac{1-z}{1-(-z)^n (\beta-\gamma)} dz \quad (4.3.16)$$

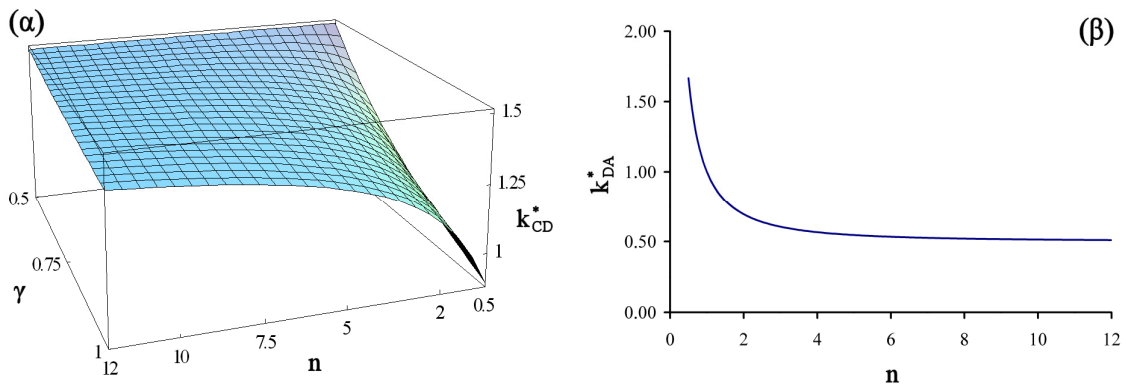
Το ολοκλήρωμα (4.3.16) μπορεί να εκφραστεί με όρους υπεργεωμετρικής συνάρτησης ως εξής:

$$E_{\overline{D'CCD}} = F_{\max}^h u_y k_{CD}^* \quad (4.3.17)$$

όπου:

$$k_{CD}^* = z_A {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta - \gamma) z_A^n\right) + \frac{1}{2} z_A {}_2F_1\left(1, \frac{2}{n}, 1 + \frac{2}{n}; (\beta - \gamma) z_A^n\right) \quad (4.3.18)$$

Όταν το σύστημα διαρρέει πλήρως, προκύπτει ότι  $z_A \cong 1$  και η παράμετρος  $k_{CD}^*$  είναι συνάρτηση των  $n$  και  $\gamma$  μόνον (Εικόνα 4.3.3α). Επιπλέον, όταν  $\beta = \gamma = 1/2$  ο κλάδος αποφόρτισης είναι ευθεία γραμμή με κλίση  $F_{\max}^h / u_y$ . Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση (4.3.17) δίνει ως αποτέλεσμα  $3/2 F_{\max}^h u_y$  (ανεξάρτητο του  $n$ ), δηλαδή το εμβαδόν του τραπεζιού  $D'C'CD$  (Εικόνα 4.3.2).



**Εικόνα 4.3.3: (α)  $k_{CD}^*$  ως συνάρτηση των  $n, \gamma$  (β)  $k_{CD}^*$  ως συνάρτηση του  $n$  (πλήρης διαρροή)**

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική, το συμπληρωματικό εμβαδόν για το τμήμα  $DA$  υπολογίζεται ως εξής:

$$E_{AD'D} = F_{\max}^h u_y \int_0^{z_A} \frac{1-z}{1-z^n} dz \quad (4.3.19)$$

Το ολοκλήρωμα (4.3.19) μπορεί να εκφραστεί με όρους υπεργεωμετρικής συνάρτησης ως εξής:

$$E_{AD'D} = F_{\max}^h u_y k_{DA}^* \quad (4.3.20)$$

όπου:

$$k_{DA}^* = z_A {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; z_A^n\right) - \frac{1}{2} z_A {}_2F_1\left(1, \frac{2}{n}, 1 + \frac{2}{n}; z_A^n\right) \quad (4.3.21)$$

Η ειδοποιός διαφορά σε σχέση με την μέθοδο απ' ευθείας ολοκλήρωσης, δηλαδή σε σχέση με τις εξισώσεις (4.3.12) ως (4.3.14), είναι ότι όταν το σύστημα διαρρέει πλήρως και  $z_A \rightarrow 1^-$  το όριο της εξίσωσης (4.3.21) είναι πεπερασμένο και μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά. Επιπλέον, υπάρχουν και αναλυτικές τιμές του ορίου για διάφορες τιμές της εκθετικής παραμέτρου  $n$  (Πίνακας 4.3.2).

$n$	$k_{DA}^*$ (αναλυτικά)	$k_{DA}^*$ (αριθμητικά)
1/2	5/3	1.666667
1	1	1.000000
3/2	$2(1 - \sqrt{3}\pi/9)$	0.790800
2	$\ln(2)$	0.693147
3	$\sqrt{3}\pi/9$	0.604600
4	$(\pi + \ln(4))/8$	0.565986
6	$(\sqrt{3}\pi + \ln(64))/18$	0.533349
12	$(2\pi + \ln(4) - \sqrt{3}\ln(7 - 4\sqrt{3}))/24$	0.509648

**Πίνακας 4.3.2: Παράμετρος  $k_{DA}^*$  για διάφορες τιμές του  $n$  (πλήρης διαρροή)**

Για μεγάλες τιμές του  $n$ , η μετάβαση του υστερητικού ελατηρίου από τον ελαστικό στον πλαστικό κλάδο είναι απότομη. Παρατηρείται ότι καθώς αυξάνει το  $n$ , η παράμετρος  $k_{DA}^*$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά το 1/2 (Εικόνα 4.3.3β). Στο όριο, η εξίσωση (4.3.20) δίνει ως αποτέλεσμα  $F_{\max}^h u_y / 2$ , δηλαδή το εμβαδόν του τριγώνου  $GD'D$  (Εικόνα 4.3.2).

Με βάση τα συμπληρωματικά εμβαδά, δηλαδή τις εξισώσεις (4.3.17) και (4.3.20), η εξίσωση (4.3.15) παίρνει την μορφή:

$$E = 2F_{\max}^h u_y \left( 2 \frac{u_{\max}}{u_y} - k_{CD}^* - k_{DA}^* \right) \quad (4.3.22)$$



Η εξίσωση (4.3.22) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περίπτωση τόσο μερικής όσο και πλήρους διαρροής. Ειδικότερα στην τελευταία περίπτωση, η οποία είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, οι τιμές των παραμέτρων  $k_{CD}^*$  και  $k_{DA}^*$  μπορούν να ληφθούν από απλές προσεγγιστικές σχέσεις, ως εξής:

$$k_{CD}^* \cong \frac{0.003 \ln(n) - 1.784 \ln(\gamma) - 1.238}{1 + 0.89n + 0.592\gamma} + 1.5, \quad n \in [0.5, 12], \quad \gamma \in [0.5, 1.0] \quad (4.3.23)$$

$$k_{DA}^* \cong \frac{126.57 + 87.66n + 35.96n^2}{1.0 + 177.37n + 71.83n^2}, \quad n \in [0.5, 12] \quad (4.3.24)$$

οπου,  $\ln(\bullet)$  ο φυσικός λογάριθμος.

Οι παραπάνω σχέσεις προέκυψαν με χρήση καθιερωμένων τεχνικών από ένα μεγάλο πλήθος πιθανών εξισώσεων [69]. Το μέγιστο σχετικό λάθος της εξίσωσης (4.3.23) είναι λιγότερο από 0.4% ενώ το μέσο σχετικό λάθος είναι 0.03%. Για τιμές του  $n \geq 1$ , το μέγιστο σχετικό λάθος της ίδιας εξίσωσης είναι της τάξης του 0.15% ενώ το μέσο σχετικό λάθος είναι 0.02%. Η εξίσωση (4.3.24) είναι σε κάθε περίπτωση ακριβής στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο.

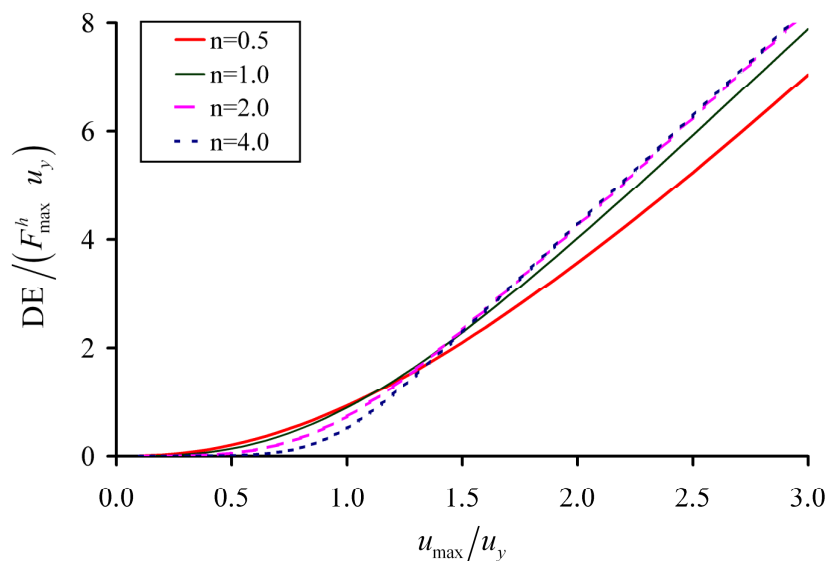
### 4.3.5 Εφαρμογές

#### 4.3.5.1 Αναλισκόμενη ενέργεια κατά την διάρκεια πλήρους υστερητικού βρόχου

Η Εικόνα 4.3.4 παρουσιάζει την αναλισκόμενη ενέργεια  $DE$  κατά την διάρκεια ενός πλήρους υστερητικού βρόχου ως συνάρτηση της μέγιστης μετατόπισης. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για διάφορες τιμές της εκθετικής παραμέτρου  $n$ . Οι δύο άξονες είναι κανονικοποιημένοι, ενώ η παράμετρος  $\gamma$  τέθηκε ίση με 0.9 σε όλες τις περιπτώσεις. Σημειώνεται ότι ο λόγος  $DE / (F_{\max}^h u_y)$  είναι ανεξάρτητος του  $a$ .

Παρατηρείται ότι καθώς η μέγιστη μετατόπιση αυξάνεται, όλες οι καμπύλες γίνονται παράλληλες ευθείες γραμμές με κλίση ίση με 4. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού για ένα σύστημα που διαρρέει πλήρως, μια αύξηση  $\Delta u_{\max}$  στην μέγιστη μετατόπιση θα είχε ως αποτέλεσμα μια αύξηση  $\Delta E = 4F_{\max}^h \Delta u_{\max}$  του εμβαδού που περικλείεται από τον

υστερητικό βρόχο (Εικόνα 4.3.2). Επιπλέον, καθώς αυξάνεται η τιμή της εκθετικής παραμέτρου  $n$ , η μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο γίνεται απότομα. Έτσι, η αναλίσκόμενη ενέργεια μειώνεται για τιμές της μέγιστης παραμόρφωσης μικρότερες της «παραμόρφωσης διαρροής», δηλαδή για  $u_{\max}/u_y < 1$ .



Εικόνα 4.3.4: Αναλίσκόμενη ενέργεια ως συνάρτηση της μέγιστης μετατόπισης ( $\beta=0.1, \gamma=0.9$ )

#### 4.3.5.2 Προσεγγιστική μέθοδος υπολογισμού και διγραμμικό προσομοίωμα

Συντάχθηκε μια παραμετρική μελέτη η οποία παρουσιάζει τις διαφορές των μεθόδων υπολογισμού της αναλίσκόμενης ενέργειας ενός συστήματος κατά την διάρκεια ενός πλήρους υστερητικού βρόχου. Οι τρεις μέθοδοι που εξετάζονται είναι οι εξής:

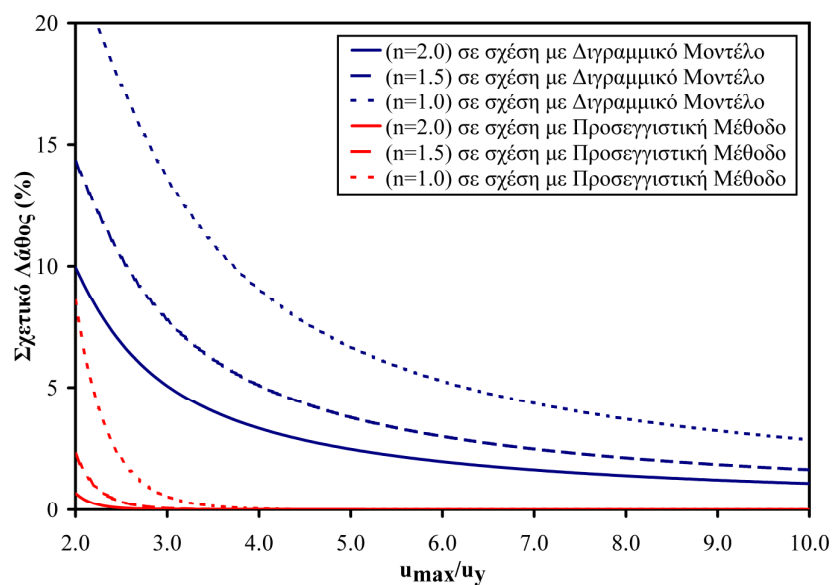
- 1) η ακριβής μέθοδος υπολογισμού της αναλίσκόμενης ενέργειας του προσομοιώματος Bouc-Wen, όπως παρουσιάστηκε στην §4.3.4,
- 2) η προσεγγιστική μέθοδος της §4.3.4, δηλαδή οι σχέσεις (4.3.23) και (4.3.24),
- 3) οι σχέσεις που δίνουν την αναλίσκόμενη ενέργεια του αντίστοιχου διγραμμικού προσομοιώματος.

Θεωρώντας ως βάση την ακριβή μέθοδο της §4.3.4, υπολογίστηκε το σχετικό λάθος της προσεγγιστικής μεθόδου καθώς και του διγραμμικού προσομοιώματος. Στην τελευταία περίπτωση, η αναλισκόμενη ενέργεια υπολογίζεται εύκολα ως εξής [64]:

$$DE = \begin{cases} 0 & u_{\max}/u_y \leq 1 \\ 4(F_y u_{\max} - F_{\max} u_y) & u_{\max}/u_y > 1 \end{cases} \quad (4.3.25)$$

Τέθηκε  $\beta = \gamma = 0.5$  ώστε οι κλάδοι αποφόρτισης να είναι ευθείες γραμμές με κλίση  $F_y/u_y$ , όπως και στο διγραμμικό προσομοίωμα. Με βάση αυτή την παραδοχή, το σχετικό λάθος είναι συνάρτηση μόνο του εύρους μετατόπισης και της εκθετικής παραμέτρου  $n$ .

Τα αποτελέσματα της παραμετρικής μελέτης παρουσιάζονται στην Εικόνα 4.3.5. Το πρώτο συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι, εφόσον η μέγιστη παραμόρφωση είναι μεγαλύτερη από το τετραπλάσιο της «παραμόρφωσης διαρροής», η προσεγγιστική μέθοδος παρουσιάζει πρακτικά μηδενικό λάθος σε σχέση με την ακριβή μέθοδο για κάθε τιμή της εκθετικής παραμέτρου  $n$ . Σε κάθε περίπτωση, η προσεγγιστική μέθοδος είναι πολύ ακριβέστερη από το διγραμμικό προσομοίωμα.



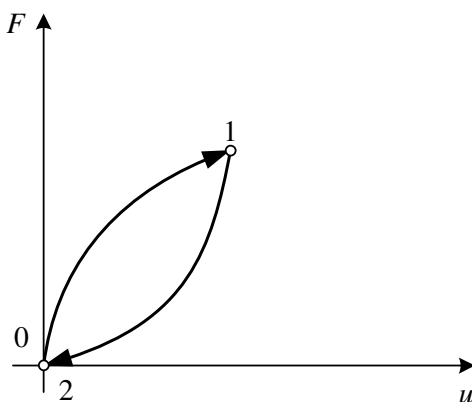
Εικόνα 4.3.5: Σχετικό λάθος (%) στον υπολογισμό της αναλισκόμενης ενέργειας

Επίσης, το σχετικό λάθος μεταξύ της ακριβούς μεθόδου και του διγραμμικού προσομοιώματος μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή της εκθετικής παραμέτρου  $n$ . Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού για μεγάλες τιμές της παραμέτρου  $n$  το προσομοίωμα Bouc-Wen προσομοιάζει το διγραμμικό.

Τέλος, παρατηρείται ότι το σχετικό λάθος μειώνεται καθώς αυξάνεται η μέγιστη μετατόπιση. Αυτό είναι επίσης αναμενόμενο, αφού η συνολική αναλισκόμενη ενέργεια αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό σε σχέση με το λάθος και συνεπώς το σχετικό λάθος μειώνεται.

#### 4.3.5.3 Ανελαστικές παραμορφώσεις του προσομοιώματος Bouc-Wen

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ένα σημαντικό συμπέρασμα: *στο προσομοίωμα Bouc-Wen δεν υπάρχει αμιγώς ελαστική περιοχή, δηλαδή προβλέπονται ανελαστικές παραμορφώσεις ανεξάρτητα από την ένταση της φόρτισης*. Για να αποδειχθεί αυτό, υποθέτουμε ότι είναι εφικτός ένας κλειστός κύκλος φόρτισης χωρίς ανελαστικές παραμορφώσεις (Εικόνα 4.3.6).



**Εικόνα 4.3.6:** Υποθετικός κλειστός κύκλος φόρτισης χωρίς ανελαστικές παραμορφώσεις

Λόγω του κλειστού κύκλου παραμόρφωσης, μπορούμε να αγνοήσουμε το ελαστικό ελατήριο του προσομοιώματος Bouc-Wen. Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.3.2) κατά την

μετάβαση  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$  και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $z_1 > 0$ ,  $u_0 = u_2 = 0$  και  $z_0 = z_2 = 0$  προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{u_1 - 0}{u_y} = z_1 {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta + \gamma) z_1^n\right) - 0 \quad (4.3.26)$$

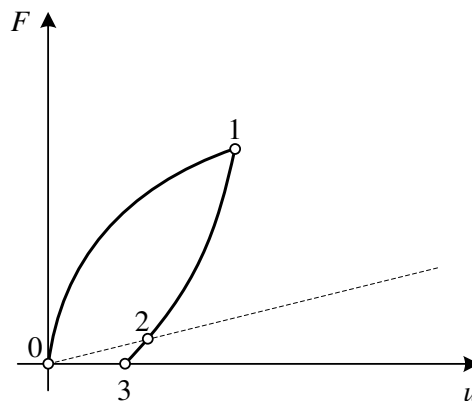
$$\frac{0 - u_1}{u_y} = 0 - z_1 {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta - \gamma) z_1^n\right) \quad (4.3.27)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και απλοποιώντας λαμβάνεται:

$${}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta - \gamma) z_1^n\right) = {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta + \gamma) z_1^n\right) \quad (4.3.28)$$

Η σχέση (4.3.28) ισχύει όταν  $\beta + \gamma = \beta - \gamma$  ή  $\gamma = 0$ . Σε αυτήν την περίπτωση, το προσομοίωμα Bouc-Wen εκφυλίζεται σε ένα μη-γραμμικό ελαστικό προσομοίωμα στο οποίο οι κλάδοι φόρτισης-αποφόρτισης ταυτίζονται και έχουν την μορφή "S".

Για να έχει νόημα η χρήση του προσομοιώματος Bouc-Wen υποθέτουμε ότι  $\gamma \neq 0$ . Τότε, με την ίδια συλλογιστική, είναι δυνατός ο υπολογισμός της ανελαστικής παραμόρφωσης κατά έναν κύκλο φόρτισης – αποφόρτισης (Εικόνα 4.3.7). Στην εικόνα απεικονίζεται η απόκριση του ελαστικού ελατηρίου με διακεκομμένη γραμμή.



Εικόνα 4.3.7: Υπολογισμός ανελαστικών παραμορφώσεων προσομοιώματος Bouc-Wen

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.3.2) κατά την μετάβαση  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $u_0 = 0$ ,  $z_0 = z_2 = 0$ ,  $z_1 > 0$  και  $z_3 < 0$  προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{u_1 - 0}{u_y} = z_1 {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta + \gamma) z_1^n\right) - 0 \quad (4.3.29)$$

$$\frac{u_2 - u_1}{u_y} = 0 - z_1 {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta - \gamma) z_1^n\right) \quad (4.3.30)$$

$$\frac{u_3 - u_2}{u_y} = z_3 {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta + \gamma)(-z_3)^n\right) - 0 \quad (4.3.31)$$

όπου θεωρήθηκε ότι  $\beta \neq \gamma$  για να έχει νόημα η χρήση της υπεργεωμετρικής συνάρτησης κατά την αποφόρτιση  $1 \rightarrow 2$ . Στο σημείο 3 η δύναμη του υστερητικού ελατηρίου είναι αντίθετη αυτής του ελαστικού, ώστε το άθροισμά τους να είναι μηδέν. Συνεπώς:

$$(1 - a) F_y z_3 = -a \frac{F_y}{u_y} u_3 \quad (4.3.32)$$

Ή διαφορετικά:

$$z_3 = -\frac{a u_3}{(1 - a) u_y} \quad (4.3.33)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (4.3.29) ως (4.3.31) και αντικαθιστώντας την σχέση (4.3.33) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{u_3}{u_y} + z_1 {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta - \gamma) z_1^n\right) &= z_1 {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta + \gamma) z_1^n\right) - \\ \frac{a u_3}{(1 - a) u_y} {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta + \gamma) \left(\frac{a u_3}{(1 - a) u_y}\right)^n\right) & \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

Κατ' αντιστοιχία με την §4.3.3, η σχέση (4.3.34) επιλύεται αριθμητικά ως προς την άγνωστη ανελαστική παραμόρφωση  $u_3$  χρησιμοποιώντας μεθόδους διχοτόμησης διαστημάτων. Όταν  $n = 1$ , η σχέση (4.3.34) επιλύεται αναλυτικά ως εξής:

$$u_3 = \frac{u_y}{a(\beta + \gamma)} \times \left( 1 - a - a \operatorname{Productlog} \left( \frac{(a-1)e^{\frac{1-a}{a}} ((\beta + \gamma)z_1 - 1)(1 - (\beta - \gamma)z_1)^{\frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma}}}{a} \right) \right) \quad (4.3.35)$$

Το συμπέρασμα που προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις είναι ότι σε φόρτιση οποιασδήποτε έντασης (η οποία οδηγεί σε μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου ίση με  $z_1$ ) αντιστοιχεί κάποια ανελαστική παραμόρφωση  $u_3$ , η οποία είναι ενδεχομένως μικρή αλλά πάντως μετρήσιμη.

## 4.4 Μειονεκτήματα προσομοιώματος

### 4.4.1 Διατύπωση του προβλήματος

Είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ότι το προσομοίωμα Bouc-Wen παρουσιάζει μη φυσική συμπεριφορά όταν υποβάλλεται σε σύντομους κύκλους φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης. Συγκεκριμένα, η υστερητική συνιστώσα του προσομοιώματος παρουσιάζει:

- Αύξηση της παραμόρφωσης (drift) κατά τον κύκλο φόρτισης μεταξύ δύο δοθέντων δυνάμεων (Εικόνα 4.4.1α),
- Μείωση της υστερητικής δύναμης επαναφοράς (force relaxation) κατά τον κύκλο φόρτισης μεταξύ δύο δοθέντων μετατοπίσεων (Εικόνα 4.4.1β),
- Μη κλείσιμο των υστερητικών βρόχων.

Συνέπεια των παραπάνω είναι ότι το προσομοίωμα παραβιάζει τοπικά τις αρχές πλαστικότητας του Drucker [71] και του Il'iushin [72]. Ο όρος «τοπικός» αφορά την

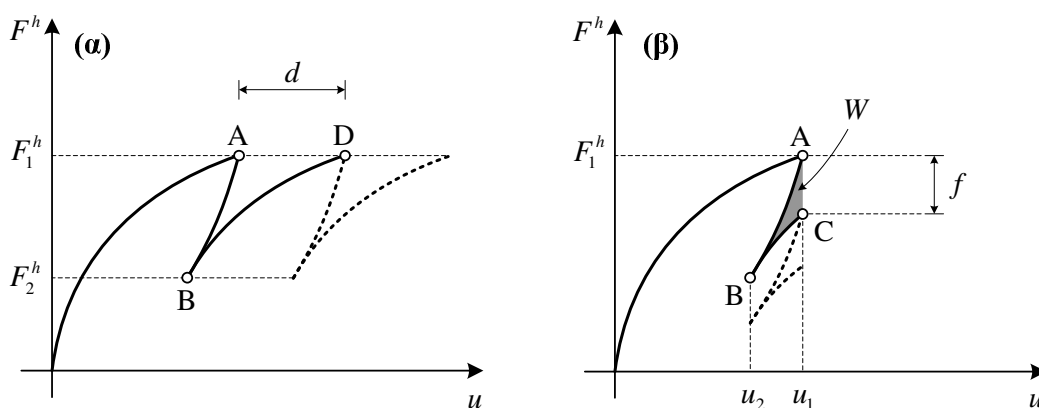
συμπεριφορά του προσομοιώματος και δεν πρέπει να προκαλεί σύγχυση, δεδομένου ότι το ίδιο το προσομοίωμα *είναι* τοπικό (local).

Σύμφωνα με την αρχή του Drucker, το παραγόμενο έργο από μια εξωτερική φόρτιση κατά έναν κλειστό κύκλο τάσης είναι μη αρνητικό (Εικόνα 4.4.2α):

$$\int_{\text{κλειστός κύκλος τάσης}} (\sigma - \sigma_0) \cdot d\varepsilon \geq 0 \quad (4.4.1)$$

Σύμφωνα με την αρχή του Il'iushin, το παραγόμενο έργο κατά την διάρκεια ενός κλειστού κύκλου παραμόρφωσης είναι μη αρνητικό (Εικόνα 4.4.2β):

$$\oint \sigma \cdot d\varepsilon \geq 0 \quad (4.4.2)$$

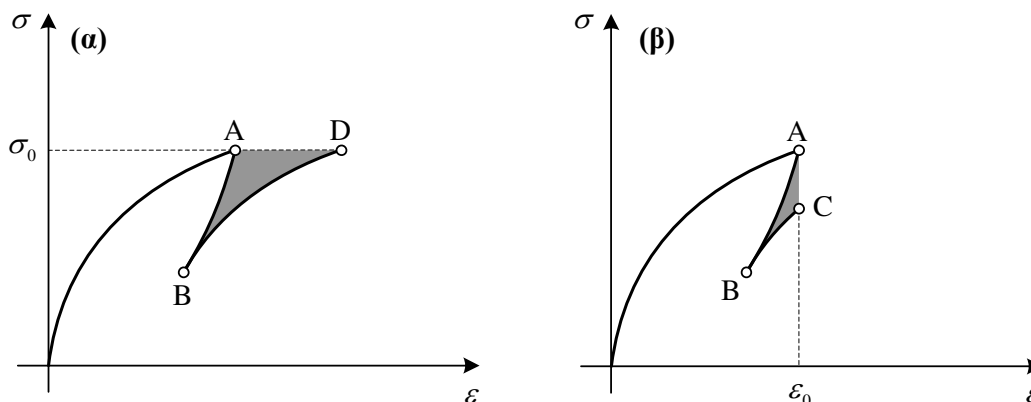


**Εικόνα 4.4.1: Απόκριση υστερητικού ελατηρίου προσομοιώματος Bouc-Wen (α) Αύξηση παραμόρφωσης κατά τον κύκλο μεταξύ δύο δοθέντων δυνάμεων (β) Μείωση δύναμης κατά τον κύκλο μεταξύ δύο δοθέντων μετατοπίσεων και παραβίαση της αρχής του Il'iushin.**

Οι αρχές της πλαστικότητας του Drucker και του Il'iushin είναι υψίστης σημασίας για την κλασική θεωρία της πλαστικότητας διότι έχουν ως συνέπεια τον κανόνα αύξησης των πλαστικών παραμορφώσεων κάθετα προς την επιφάνεια διαρροής (normality rule) καθώς και την κυρτότητα της επιφάνειας διαρροής στον χώρο των τάσεων. Η αρχή του Il'iushin είναι πιο γενική και χαρακτηρίζει την συμπεριφορά μιας μεγάλης κατηγορίας υλικών, ενώ έχει τις ίδιες συνέπειες με την αρχή του Drucker [73]. Τόσο η αρχή του Drucker όσο και αυτή του



Ηΐushin συνεπάγονται την αρχή της μέγιστης πλαστικής απώλειας (postulate of maximum plastic dissipation), ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.



**Εικόνα 4.4.2:** Παραγόμενο έργο (α) από εξωτερική φόρτιση κατά έναν κλειστό κύκλο τάσης (διαδρομή ABD) και (β) κατά έναν κλειστό κύκλο παραμόρφωσης (διαδρομή ABC).

Σε κάθε περίπτωση, ο κανόνας της καθετότητας συνεπάγεται συσχετισμένο νόμο ροής (associative flow rule). Σημειώνεται πάντως ότι πολλά υλικά, όπως τα εδάφη, περιγράφονται καλύτερα με μη-συσχετισμένους νόμους ροής (non-associative flow rule), χωρίς αυτό να σημαίνει ότι παραβιάζεται ο Δεύτερος Νόμος της Θερμοδυναμικής. Για τα υλικά όμως τα οποία εξετάζονται στα πλαίσια της παρούσας Διατριβής, θεωρείται ότι οι αρχές του Drucker και του Ηΐushin θα πρέπει να ισχύουν.

Η αιτία της συμπεριφοράς αυτής του προσομοιώματος Bouc-Wen είναι η μειωμένη δυσκαμψία επαναφόρτισης σε σχέση με την αυτήν της αποφόρτισης. Με άλλους όρους, δεν γίνεται διάκριση μεταξύ πρώτης φόρτισης και επαναφόρτισης [78]. Αυτό συνδέεται και με το γεγονός ότι ο υστερητικός τελεστής Bouc-Wen είναι Μαρκοβιανός, δηλαδή παρουσιάζει τοπική μνήμη (§2.3.2).

#### 4.4.2 Επισκόπηση υφιστάμενου ερευνητικού έργου

Τα προαναφερθέντα μειονεκτήματα έχουν αναφερθεί επανειλημμένα στην βιβλιογραφία, π.χ. [74], [75], [77], [78], [79], σε σχέση είτε με το προσομοίωμα Bouc-Wen είτε γενικότερα

με τα ενδοχρονικά προσομοιώματα στα οποία αυτό ανήκει [16], [68]. Όσον αφορά την ποσοτικοποίηση, οι Spacone et al. παρουσίασαν μια σχέση η οποία ποσοτικοποιεί την αύξηση της παραμόρφωσης στην ειδική περίπτωση που  $n = 1$  [78]. Η σχέση είναι λανθασμένη καθώς παρουσιάζει ασυνέπεια στις μονάδες μέτρησης. Στην συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου θα παρουσιαστούν οι ορθές σχέσεις, τόσο για την αύξηση της παραμόρφωσης όσο και για την μείωση της υστερητικής δύναμης και την παραβίαση της αρχής του Il'iushin.

#### 4.4.3 Μειονεκτήματα αρχικού προσομοιώματος

##### 4.4.3.1 Αύξηση παραμόρφωσης

Το υστερητικό ελατήριο του προσομοιώματος παρουσιάζει αύξηση της παραμόρφωσης κατά τον κύκλο φόρτισης μεταξύ δύο δοθέντων δυνάμεων  $F_1^h$ ,  $F_2^h$  με  $F_{\max}^h \geq F_1^h > F_2^h \geq 0$ . Η αύξηση της παραμόρφωσης  $d$  μπορεί να ποσοτικοποιηθεί εύκολα για τυχαίες τιμές των παραμέτρων  $n$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  χρησιμοποιώντας την σχέση (4.3.2) κατά την διαδρομή  $A \rightarrow B \rightarrow D$  (Εικόνα 4.4.1α). Σημειώνεται ότι  $F_{\max}^h = (1-a)F_y$ ,  $z_A = z_D = F_1^h / F_{\max}^h$ ,  $z_B = F_2^h / F_{\max}^h$  και  $\gamma > \beta$ , ενώ  $F_A \neq F_D$  εξαιτίας της συνεισφοράς του γραμμικώς ελαστικού ελατηρίου. Για  $n = 1$ , η αύξηση της παραμόρφωσης δίνεται από την σχέση:

$$d_1 = u_y \left( \frac{1}{q_m} \ln \left( \frac{F_{\max}^h - q_m F_1^h}{F_{\max}^h - q_m F_2^h} \right) + \frac{1}{q_p} \ln \left( \frac{F_{\max}^h - q_p F_2^h}{F_{\max}^h - q_p F_1^h} \right) \right) \quad (4.4.3)$$

όπου  $q_p = \beta + \gamma$ ,  $q_m = \beta - \gamma$  και  $\ln(\cdot)$  ο φυσικός λογάριθμος. Για  $n = 2$ , η αύξηση της παραμόρφωσης εκφράζεται ως:

$$d_2 = u_y \left( \frac{\operatorname{atanh} \left( \frac{\sqrt{q_m} F_2^h}{F_{\max}^h} \right) - \operatorname{atanh} \left( \frac{\sqrt{q_m} F_1^h}{F_{\max}^h} \right)}{\sqrt{q_m}} + \frac{\operatorname{atanh} \left( \frac{\sqrt{q_p} F_1^h}{F_{\max}^h} \right) - \operatorname{atanh} \left( \frac{\sqrt{q_p} F_2^h}{F_{\max}^h} \right)}{\sqrt{q_p}} \right) \quad (4.4.4)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία  $\beta = \gamma$  ο κλάδος αποφόρτισης εκφράζεται από την σχέση (4.3.5) και συνεπώς οι σχέσεις (4.4.3) και (4.4.4) τροποποιούνται αντίστοιχα ως εξής:

$$d_1^* = u_y \left( \frac{F_2^h - F_1^h}{F_{\max}^h} + \frac{1}{q_p} \ln \left( \frac{F_{\max}^h - q_p F_2^h}{F_{\max}^h - q_p F_1^h} \right) \right) \quad (4.4.5)$$

$$d_2^* = u_y \left( \frac{F_2^h - F_1^h}{F_{\max}^h} + \frac{\operatorname{atanh} \left( \frac{\sqrt{q_p} F_1^h}{F_{\max}^h} \right) - \operatorname{atanh} \left( \frac{\sqrt{q_p} F_2^h}{F_{\max}^h} \right)}{\sqrt{q_p}} \right) \quad (4.4.6)$$

#### 4.4.3.2 Μείωση υστερητικής δύναμης

Το υστερητικό ελατήριο παρουσιάζει μείωση της υστερητικής δύναμης κατά τον κύκλο φόρτισης μεταξύ δύο δοθέντων μετατοπίσεων  $u_1, u_2$  με  $u_1 > u_2$ . Η μείωση της υστερητικής δύναμης  $f$  μπορεί να ποσοτικοποιηθεί εύκολα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.3.3) και (4.3.4) στην διαδρομή  $A \rightarrow B \rightarrow C$  κατά την οποία η υστερητική δύναμη δεν αλλάζει πρόσημο (Εικόνα 4.4.1β). Για  $n = 1$ , η μείωση δίνεται από την σχέση:

$$f_1 = \frac{(e_p - e_m) F_1^h}{e_p} + \frac{F_{\max}^h (e_m - 1)}{e_p q_m} + \frac{F_{\max}^h (1 - e_p)}{e_p q_p} \quad (4.4.7)$$

όπου  $e_p = \exp(q_p \Delta u / u_y)$ ,  $e_m = \exp(q_m \Delta u / u_y)$  και  $\Delta u = u_1 - u_2$ . Για  $n = 2$  η μείωση εκφράζεται ως:

$$f_2 = F_1^h - \frac{F_{\max}^h}{\sqrt{q_p}} \operatorname{tanh} \left( \frac{\sqrt{q_p} \Delta u}{u_y} - \operatorname{atanh} \left( \frac{q_p \operatorname{tanh} \left( \frac{\sqrt{q_m} \Delta u}{u_y} - \operatorname{atanh} \left( \frac{\sqrt{q_m} F_1^h}{F_{\max}^h} \right) \right)}{\sqrt{q_p q_m}} \right) \right) \quad (4.4.8)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία  $\beta = \gamma$  ο κλάδος αποφόρτισης εκφράζεται από την σχέση (4.3.5) και συνεπώς οι σχέσεις (4.4.7) και (4.4.8) τροποποιούνται αντίστοιχα ως εξής:

$$f_1^* = \frac{\Delta u F_{\max}^h}{e_p u_y} + \frac{(e_p - 1)(q_p F_1^h - F_{\max}^h)}{q_p e_p} \quad (4.4.9)$$

$$f_2^* = F_1^h - \frac{F_{\max}^h}{\sqrt{q_p}} \tanh \left( \frac{\sqrt{q_p} \Delta u}{u_y} + \operatorname{atanh} \left( \sqrt{q_p} \left( \frac{F_1^h}{F_{\max}^h} - \frac{\Delta u}{u_y} \right) \right) \right) \quad (4.4.10)$$

#### 4.4.3.3 Παραβίαση της αρχής πλαστικότητας του Il'iushin

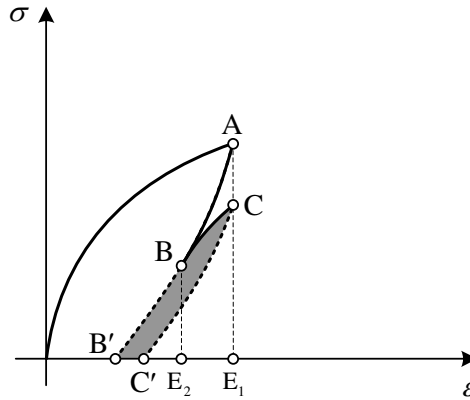
Σύμφωνα με την αρχή της πλαστικότητας του Il'iushin, το ολικό έργο που παράγεται κατά έναν κλειστό ισοθερμικό κύκλο παραμόρφωσης είναι μη αρνητικό [72]. Για την περίπτωση του προσομοιώματος Bouc-Wen, το έργο του γραμμικώς ελαστικού ελατηρίου κατά έναν κλειστό κύκλο παραμόρφωσης είναι μηδενικό. Συνεπώς, προς παραβίαση της αρχής, το ολικό έργο  $W$  κατά την διαδρομή  $A \rightarrow B \rightarrow C$  εκφράζεται από το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου με αρνητικό πρόσημο (Εικόνα 4.4.1β). Σημειώνεται ότι *το έργο  $W$  δεν είναι ίσο με την αναλισκόμενη ενέργεια κατά την ίδια διαδρομή* [82]. Εάν ήταν, το προσομοίωμα θα παραβίαζε τον Δεύτερο Νόμο της Θερμοδυναμικής [83].

Για να γίνει αντιληπτό αυτό το σημείο, διευκολύνει ιδιαίτερα η αντίληψη του υλικού ως μια «μηχανή». Όταν το υλικό βρίσκεται στην κατάσταση  $A$  περιλαμβάνει ένα ποσό αποθηκευμένης ανακτήσιμης ενέργειας, η μέγιστη τιμή της οποίας δίνεται από το εμβαδόν  $AB'E_1$  (Εικόνα 4.4.3). Στο ερώτημα «μπορεί η μηχανή να αποσπάσει μέρος της αποθηκευμένης ενέργειας κατά την διαδρομή  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ;» η απάντηση είναι «ναι, αλλά με κάποιο κόστος». Το κόστος προκύπτει από το γεγονός ότι το υλικό πλέον βρίσκεται στην κατάσταση  $C$  η οποία περιλαμβάνει λιγότερη αποθηκευμένη ενέργεια, η μέγιστη τιμή της οποίας δίνεται από το εμβαδόν  $CC'E_1$ . Συνεπώς η ενέργεια που αποσπάται εκφράζεται από το εμβαδόν  $ABC$ , ενώ η μείωση της αποθηκευμένης ενέργειας από το εμβαδόν  $AB'C'C$ . Η απόδοση  $\eta$  της μηχανής είναι θετικός αριθμός μικρότερος της μονάδας και δίνεται από την σχέση:

$$\eta = \frac{ABC}{AB'C'C} \quad (4.4.11)$$

Επιπλέον, η αναλίσκόμενη ενέργεια  $D$  προκύπτει ως:

$$D = AB'C'C - ABC = BB'C'C > 0 \quad (4.4.12)$$



Εικόνα 4.4.3: Αναλίσκόμενη ενέργεια κατά την διαδρομή ABC.

Το ολικό έργο  $W$  στην διαδρομή  $A \rightarrow B \rightarrow C$  κατά την οποία η υστερητική δύναμη δεν αλλάζει πρόσημο δίνεται από την σχέση:

$$W = F_{\max}^h u_y \left( \int_{z_A}^{z_B} \frac{z}{1 - (\beta - \gamma) z^n} dz + \int_{z_B}^{z_C} \frac{z}{1 - z^n} dz \right) \quad (4.4.13)$$

Για  $n = 1$ , το ολικό έργο εκφράζεται ως:

$$W_1 = F_{\max}^h u_y \left( \frac{q_m (z_A - z_B) + \ln \left( \frac{1 - q_m z_A}{1 - q_m z_B} \right)}{q_m^2} + \frac{q_p (z_B - z_C) + \ln \left( \frac{1 - q_p z_B}{1 - q_p z_C} \right)}{q_p^2} \right) \quad (4.4.14)$$

όπου,  $z_A = F_1^h / F_{\max}^h$  και οι τιμές των  $z_B, z_C$  προκύπτουν με διαδοχική εφαρμογή της σχέσης (4.3.3). Για  $n = 2$ , το ολικό έργο δίνεται από την σχέση:

$$W_2 = \frac{F_{\max}^h u_y}{2} \left( \frac{1}{q_m} \ln \left( \frac{1 - q_m z_A^2}{1 - q_m z_B^2} \right) + \frac{1}{q_p} \ln \left( \frac{1 - q_p z_B^2}{1 - q_p z_C^2} \right) \right) \quad (4.4.15)$$

όπου, οι τιμές των  $z_B, z_C$  προκύπτουν με διαδοχική εφαρμογή της σχέσης (4.3.4).

Στην περίπτωση κατά την οποία  $\beta = \gamma$ , ο κλάδος αποφόρτισης εκφράζεται από την σχέση (4.3.5) και συνεπώς οι σχέσεις (4.4.14) και (4.4.15) τροποποιούνται αντίστοιχα ως εξής:

$$W_1^* = F_{\max}^h u_y \left( \frac{z_B^2 - z_A^2}{2} + \frac{q_p (z_B - z_C) + \ln \left( \frac{1 - q_p z_B}{1 - q_p z_C} \right)}{q_p^2} \right) \quad (4.4.16)$$

$$W_2^* = \frac{F_{\max}^h u_y}{2} \left( z_B^2 - z_A^2 + \frac{1}{q_p} \ln \left( \frac{1 - q_p z_B^2}{1 - q_p z_C^2} \right) \right) \quad (4.4.17)$$

## 4.5 Τροποποιημένο προσομοίωμα

### 4.5.1 Επισκόπηση υφιστάμενου ερευνητικού έργου

Για την αντιμετώπιση των προαναφερθέντων προβλημάτων, μια τροποποίηση του προσομοιώματος Bouc-Wen προτάθηκε από τον Casciati [75] και υιοθετήθηκε από άλλους ερευνητές, π.χ. [76]. Βασίζεται στην εισαγωγή ενός επιπλέον «αντίστροφου» υστερητικού όρου ο οποίος ενεργοποιείται κατά την επαναφόρτιση και έχει ως συνέπεια την παραγωγή «αρνητικών» ανελαστικών παραμορφώσεων. Η τροποποίηση του Casciati επιτυγχάνει την μείωση, αλλά όχι την εξάλειψη των προβλημάτων του προσομοιώματος [78], [79], [80].

Αξίζει να σημειωθεί ότι το μέγεθος της παραβίασης των αρχών του Drucker και του Il'iushin μπορεί να μειωθεί με την χρήση μεγάλων τιμών της εκθετικής παραμέτρου  $n$ . Αυτό όμως οδηγεί σε σχεδόν διγραμμική συμπεριφορά (§4.2.4), για την οποία το προσομοίωμα Bouc-Wen δεν έχει να προσφέρει κάποιο πλεονέκτημα σε σχέση με το απλό διγραμμικό προσομοίωμα. Επιπλέον, η χρήση μεγάλης τιμής της εκθετικής παραμέτρου μειώνει την ακρίβεια που μπορεί να επιτευχθεί με στοχαστικές μεθόδους ισοδύναμης γραμμικοποίησης (stochastic equivalent linearization techniques) [81].

#### 4.5.2 Προτεινόμενη τροποποίηση του προσομοιώματος Bouc-Wen

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής προτείνεται μια απλή τροποποίηση του προσομοιώματος Bouc-Wen η οποία εξαλείφει τα προαναφερθέντα προβλήματα. Η τροποποίηση βασίζεται στην απ' ευθείας εισαγωγή ενός κατάλληλου συντελεστή αύξησης της δυσκαμψίας στην διαφορική εξίσωση του προσομοιώματος. Το τροποποιημένο προσομοίωμα υλοποιεί την παρατήρηση ότι *η επαναφόρτιση μετά από μερική αποφόρτιση θα πρέπει να ακολουθεί τον κλάδο αποφόρτισης μέχρι το σημείο αναστροφής*. Παρόμοια τροποποίηση προτάθηκε από τους Riddell και Newmark [20] για την διόρθωση της μη φυσικής συμπεριφοράς του προσομοιώματος των Clough και Johnston [19].

Η ρίζα του προβλήματος είναι ότι το προσομοίωμα προβλέπει μειωμένη δυσκαμψία επαναφόρτισης σε σχέση με την δυσκαμψία αποφόρτισης στο ίδιο σημείο. Συνεπώς, αναζητείται ένας μηχανισμός ελέγχου της δυσκαμψίας μεταξύ των δύο αυτών ακραίων τιμών. Έτσι, η σχέση (4.2.2) τροποποιείται ως εξής:

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{u_y} \left[ A - |z(t)|^n \left( \beta + \left( \text{sgn}(\dot{u}(t)z(t)) - 2H(\dot{u}(t)z(t))R_s(u, z) \right) \gamma \right) \right] \dot{u}(t) \quad (4.5.1)$$

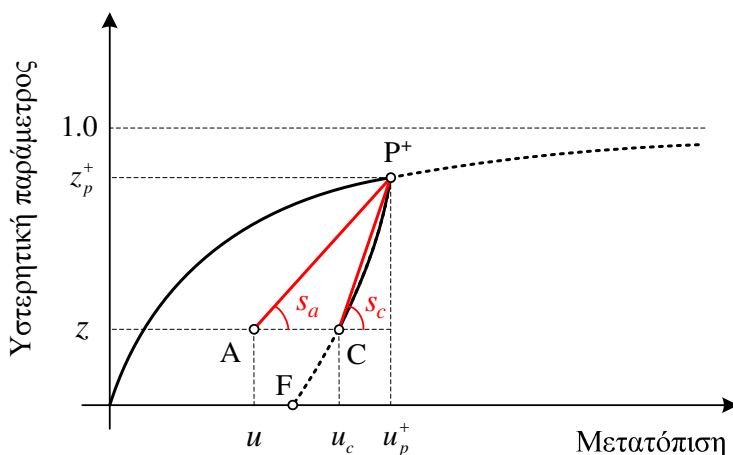
όπου:

- η υπογραμμισμένη έκφραση είναι η προτεινόμενη τροποποίηση,
- $R_s(u, z) \in [0, 1]$  είναι ένας συντελεστής αύξησης της δυσκαμψίας,
- $H(\bullet)$  η συνάρτηση Heaviside.

Οι κλάδοι αποφόρτισης παραμένουν αμετάβλητοι λόγω της συνάρτησης Heaviside. Στην περίπτωση φόρτισης ή επαναφόρτισης, ο συντελεστής  $R_s(u, z)$  ελέγχει την μετάβαση μεταξύ μειωμένης δυσκαμψίας επαναφόρτισης και αυξημένης δυσκαμψίας αποφόρτισης. Για  $R_s = 0$ , η σχέση (4.5.1) μεταπίπτει στην (4.2.2) και το τροποποιημένο προσομοίωμα γίνεται πανομοιότυπο με το αρχικό. Για  $R_s = 1$ , η δυσκαμψία επαναφόρτισης αυξάνεται και γίνεται ίση με την δυσκαμψία αποφόρτισης στο ίδιο σημείο.

Στην συνέχεια, αναζητείται μια κατάλληλη διατύπωση του συντελεστή  $R_s$ . Με βάση τις σχέσεις (4.3.2) και (4.3.5), ο πλήρης κλάδος αποφόρτισης από κάποιο σημείο αναστροφής είναι *εκ των προτέρων* γνωστός σε αναλυτική μορφή. Στην περίπτωση που  $\beta \neq \gamma$  ο κλάδος είναι καμπύλος ενώ όταν  $\beta = \gamma = 1/2$  είναι μια ευθεία γραμμή. Θέτοντας  $R_s = 1$  κατά μήκος του κλάδου αποφόρτισης προκύπτει το προσδοκούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή το ότι η επαναφόρτιση μετά από μερική αποφόρτιση ακολουθεί τον κλάδο αποφόρτισης *ακριβώς*. Στο σημείο αναστροφής θα πρέπει να τεθεί  $R_s = 0$ , ούτως ώστε η φόρτιση να συνεχιστεί με την κανονική (μειωμένη) δυσκαμψία του προσομοιώματος. Τέλος, ο συντελεστής  $R_s$  θα πρέπει να φθίνει σε περιοχές μακριά από τον κλάδο αποφόρτισης ώστε η ολική συμπεριφορά του προσομοιώματος να μην επηρεαστεί.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, προτείνεται μια κατάλληλη διατύπωση του συντελεστή  $R_s$ . Θεωρούμε το σημείο αναστροφής  $P^+(u_p^+, z_p^+)$  στο άνω ημιεπίπεδο του χώρου  $u - z$  ( $z_p^+ > 0$ ). Υποθέτουμε συμμετρική διατύπωση ως προς την αρχή των αξόνων και για το κάτω ημιεπίπεδο. Κατά την φάση της επαναφόρτισης, θεωρούμε ότι η τρέχουσα κατάσταση του συστήματος αναπαριστάται από το σημείο  $A(u, z)$  με  $0 \leq z < z_p^+$  (Εικόνα 4.5.1).



Εικόνα 4.5.1: Ορισμός συντελεστή αύξησης δυσκαμψίας  $R_s$ .



Το σημείο  $C(u_c, z)$  είναι το αντίστοιχο σημείο του κλάδου αποφόρτισης. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (4.3.2) και (4.3.5), η μετατόπιση  $u_c(z)$  δίνεται από τις σχέσεις (4.5.2) και (4.5.3) για  $\gamma \neq \beta$  και  $\gamma = \beta = 1/2$ , αντίστοιχα:

$$u_c(z) = u_y z {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta - \gamma) z^n\right) \Big|_{z_p^+}^z + u_p^+ \quad (4.5.2)$$

$$u_c^*(z) = (z - z_p^+) u_y + u_p^+ \quad (4.5.3)$$

Ένας φυσικός τρόπος ελέγχου της δυσκαμψίας στον χώρο  $u - z$  βασίζεται στις κλίσεις στον ίδιο χώρο. Έστω  $s_a$  η κλίση της ευθείας  $AP^+$  και  $s_c$  η κλίση της «κρίσιμης» ευθείας  $CP^+$ . Από την Εικόνα 4.5.1 προκύπτει ότι  $s_a/s_c = (u_p^+ - u_c)/(u_p^+ - u)$ . Με βάση αυτόν τον λόγο, προτείνεται η παρακάτω απλή διατύπωση του συντελεστή  $R_s$ :

$$R_s(u, z) = H(z_p^+ - z) H(u_c - u) \left( \frac{u_p^+ - u_c}{u_p^+ - u} \right)^p \quad (4.5.4)$$

όπου,  $p \geq 1$  είναι μια σταθερά. Καθώς το σημείο  $A$  προσεγγίζει το σημείο  $C$  από αριστερά, ο συντελεστής  $R_s$  αυξάνεται και προσεγγίζει την μονάδα. Όταν τα σημεία  $A$  και  $C$  συμπέσουν, τότε  $R_s = 1$  και η φόρτιση ακολουθεί το ίχνος του κλάδου αποφόρτισης *ακριβώς*. Έτσι, ο πλήρης κλάδος αποφόρτισης  $P^+ - F$  είναι ένας «οριζοντας», με την έννοια ότι δεν μπορεί να τμηθεί. Όταν  $z > z_p^+$  ή  $u > u_c$  το φαινόμενο αύξησης της δυσκαμψίας εξαφανίζεται λόγω των συναρτήσεων Heaviside της σχέσης (4.5.4).

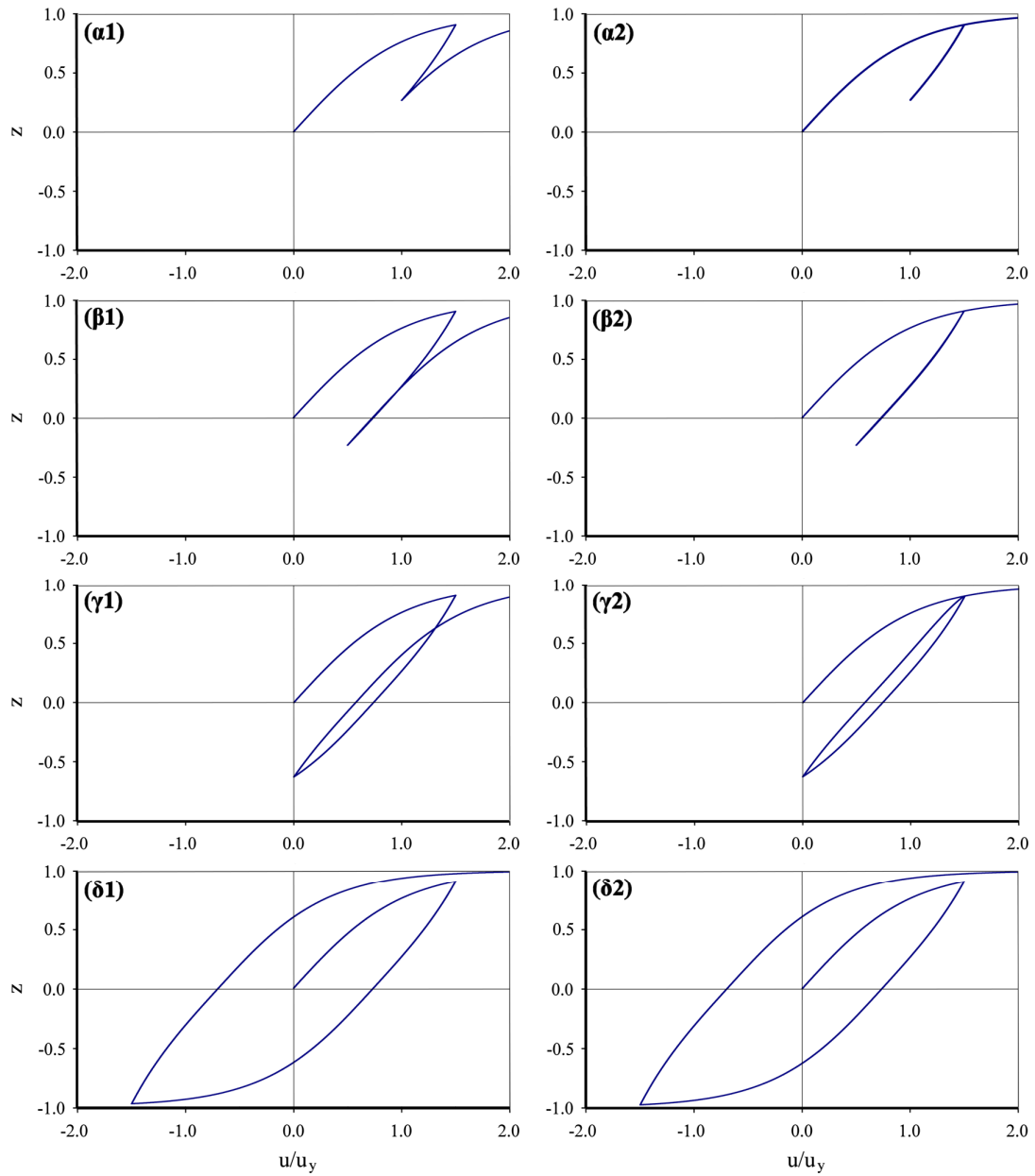
Η παράμετρος  $p$  ελέγχει την κατανομή του συντελεστή  $R_s$  προς τα αριστερά του κλάδου αποφόρτισης. Για μεγάλες τιμές του  $p$ , η αύξηση της δυσκαμψίας συγκεντρώνεται κοντά στον κλάδο αποφόρτισης και πρακτικά εξαφανίζεται οπουδήποτε αλλού. Γενικά, παρατηρήθηκε ότι τιμές του  $p$  ανάμεσα στο 1.0 και το 2.0 οδηγούν σε ρεαλιστική υστερητική συμπεριφορά.

Για την ανάδειξη των διαφορών μεταξύ τροποποιημένου και αρχικού προσομοιώματος, θεωρούμε ένα σύστημα με  $n = 2$ ,  $\beta = 0.1$  και  $\gamma = 0.9$  το οποίο υποβάλλεται στην πρώτη φόρτισή του προς την θετική κατεύθυνση. Η πρώτη αναστροφή της κίνησης πραγματοποιείται για  $u_p^+ = 1.5u_y$ , οπότε  $z_p^+ \cong 0.905$ . Το σύστημα υποβάλλεται σε αποφόρτιση (και ενδεχομένως φόρτιση προς την αρνητική κατεύθυνση) και στην συνέχεια ξανά σε φόρτιση προς την θετική κατεύθυνση.

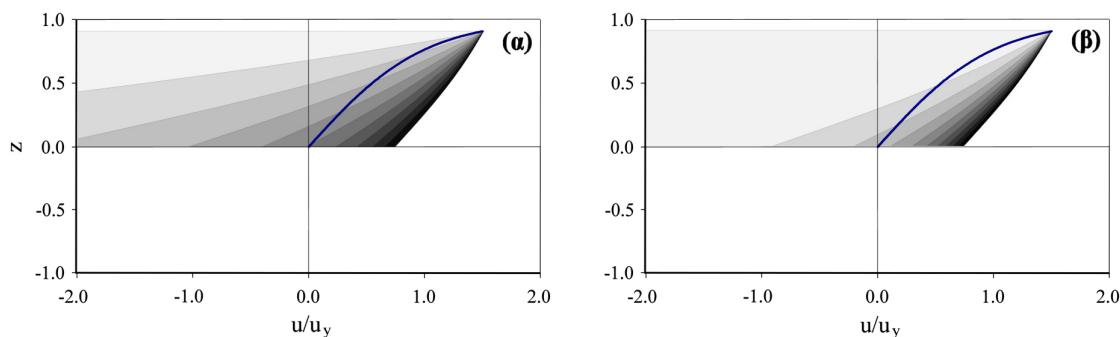
Χρησιμοποιώντας το τροποποιημένο προσομοίωμα με  $p = 2$ , προκύπτουν σαφείς διαφορές στην υστερητική απόκριση. Συγκεκριμένα, η Εικόνα 4.5.2 παρουσιάζει τις περιπτώσεις (α) έως (δ), όπου η φόρτιση προς την αρνητική κατεύθυνση οδηγεί σε μετατόπιση ίση με  $u_y$ ,  $0.5 u_y$ ,  $0$  και  $-1.5 u_y$ , αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι οι διαφορές στην απόκριση εξαρτώνται από το εύρος της αναστροφής. Στις περιπτώσεις (α), (β), (γ), η μη φυσική συμπεριφορά του προσομοιώματος διορθώνεται, ενώ στην περίπτωση (δ) η απόκριση του αρχικού και του τροποποιημένου προσομοιώματος πρακτικά ταυτίζονται.

Σημειώνεται ότι για την περίπτωση (α1) η εφαρμογή των σχέσεων (4.4.4), (4.4.8) και (4.4.15) δίνει αύξηση μετατόπισης  $d \cong 0.728u_y$ , μείωση δύναμης επαναφοράς  $f \cong 0.257F_{\max}^h$  και παραβίαση της αρχής του Il'iuschin  $W \cong -0.044756F_{\max}^h u_y$ .

Επιπλέον, η Εικόνα 4.5.3 παρουσιάζει τις καμπύλες ίσης τιμής του συντελεστή  $R_s$  για τις περιπτώσεις  $p = 1$  και  $p = 2$ . Αυτά τα γραφήματα ορίζονται πλήρως κατά την επιλογή του σημείου αναστροφής  $P^+(1.5u_y, 0.905)$ . Όσο πιο σκοτεινό είναι κάποιο σημείο, τόσο πιο έντονο είναι το φαινόμενο αύξησης της δυσκαμψίας στο σημείο αυτό κατά την φάση της επαναφόρτισης. Το δεξί όριο της πλέον σκοτεινής περιοχής ταυτίζεται με τον κλάδο αποφόρτισης, κατά μήκος του οποίου ισχύει ότι  $R_s = 1$  ανεξάρτητα από την τιμή του  $p$ . Παρατηρείται ότι για  $p = 2$ , η αύξηση της δυσκαμψίας συγκεντρώνεται κοντά στον κλάδο αποφόρτισης.



**Εικόνα 4.5.2: Αύξηση δυσκαμψίας στον χώρο  $u$ - $z$ : αρχικό προσομοίωμα (αριστερά), τροποποιημένο (δεξιά) ( $n=2$ ,  $\gamma=0.9$ ,  $\beta=0.1$ ,  $u_p^+=1.5u_y$ ,  $z_p^+\approx 0.905$ ,  $\rho=2$ ).**



**Εικόνα 4.5.3: Καμπύλες ίσης τιμής συντελεστή  $R_s$  στον χώρο  $u$ - $z$ :  $\gamma=0.9$ ,  $\beta=0.1$ ,  $u_p^+=1.5u_y$ ,  $z_p^+=0.905$  και (α)  $p=1.0$  (β)  $p=2.0$ .**

Τέλος, σημειώνεται ότι ο όρος  $H(u_c - u)$  της σχέσης (4.5.4) εισήχθη για να αναδείξει το όριο της περιοχής αύξησης της δυσκαμψίας το οποίο ταυτίζεται με τον κλάδο αποφόρτισης (Εικόνα 4.5.3). Σε αλγοριθμικό επίπεδο, ο όρος αυτός δεν είναι απαραίτητος για την λειτουργία της προτεινόμενης τροποποίησης. Αντιθέτως, η αφαίρεσή του συνεισφέρει στην σταθερότητα του αλγορίθμου, διότι στην περίπτωση κατά την οποία η φόρτιση ακολουθεί το ίχνος του κλάδου αποφόρτισης, μπορεί για λόγους στρογγύλευσης η μετατόπιση  $u$  να πάρει τιμές ελαφρώς μεγαλύτερες της  $u_c$ . Εφόσον αφαιρεθεί ο όρος  $H(u_c - u)$ , αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα τιμές του συντελεστή  $R_s$  ελαφρώς μεγαλύτερες της μονάδας και επιστροφή της απόκρισης επί του ίχνους του κλάδου αποφόρτισης.

### 4.5.3 Επιλογή σημείων αναστροφής

Η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης τροποποίησης επιδείχθηκε για την περίπτωση ενός μόνο σημείου αναστροφής. Παρ' όλα αυτά, στην περίπτωση σεισμικής διέγερσης ανακύπτει ένα σημαντικό ζήτημα σχετικά με το *ποιο σημείο αναστροφής θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί*. Για λόγους διευκόλυνσης της αλγοριθμικής υλοποίησης, η ανάλυση που θα παρουσιαστεί στην συνέχεια βασίζεται σε διακριτές χρονικές στιγμές  $t_i$  με  $i = 0, 1, 2, \dots$  και  $t_0 = 0$ . Όλες οι σχέσεις αναφέρονται στο άνω ημιεπίπεδο του χώρου  $u - z$ . Υποτίθεται συμμετρική διατύπωση ως προς την αρχή των αξόνων και για το κάτω ημιεπίπεδο.

Ως πρώτη προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί το πλέον πρόσφατο σημείο αναστροφής. Το σύνολο των χρονικών στιγμών το οποίο αντιστοιχεί σε σημεία αναστροφής μέχρι την στιγμή  $t_i$  ( $i \geq 2$ ) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$T_i^+ = \left\{ t_j \mid u(t_{j-1}) < u(t_j) \wedge u(t_j) > u(t_{j+1}) \wedge z(t_j) > 0, j = \{1, 2, \dots, i-1\} \right\} \quad (4.5.5)$$

Με βάση την σχέση (4.5.5), το σύνολο  $T_i^+$  περιέχει όλες τις χρονικές στιγμές (έως την τρέχουσα  $t_i$ ) για τις οποίες η μετατόπιση παρουσιάζει τοπικά μέγιστα και η υστερητική παράμετρος είναι θετική. Το πλέον πρόσφατο σημείο αναστροφής δίνεται απλά ως:

$$t_i^+ = \max T_i^+ \quad (4.5.6)$$

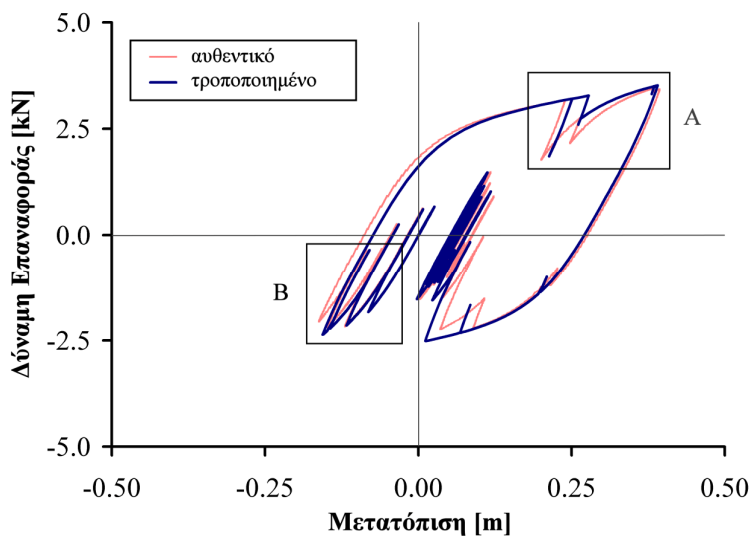
Παρ' όλα αυτά, η διατύπωση αυτή δεν είναι αποτελεσματική στην περίπτωση σεισμικής διέγερσης. Προς απόδειξη αυτού, έστω ένα σύστημα με τις παρακάτω ιδιότητες:  $\gamma = 0.9$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $a = 0.10$ ,  $n = 2.0$ ,  $F_y = 2.86kN$ ,  $u_y = 0.111m$ ,  $m = 13kNs^2/m$  και  $p = 2.0$ . Για τις αναλύσεις που θα παρουσιαστούν στην συνέχεια χρησιμοποιήθηκε η σεισμική διέγερση Northridge TAR090 [84]. Παρατηρείται ότι η προσδοκώμενη συμπεριφορά του προσομοιώματος δεν επιτυγχάνεται στις λεπτομέρειες A και B (Εικόνα 4.5.4).

Μια διαφορετική προσέγγιση χρησιμοποιεί το σημείο αναστροφής το οποίο αντιστοιχεί σε μέγιστη μετατόπιση. Το σύνολο αυτών των χρονικών στιγμών δίνεται ως:

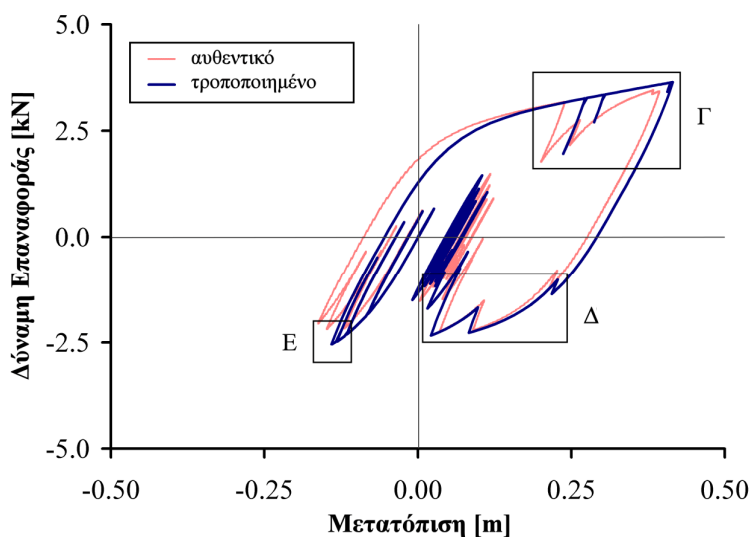
$$\bar{T}_i^+ = \left\{ t_j \in T_i^+ \mid u(t_j) \geq u(t_k), \forall t_k \in T_i^+ \right\} \subseteq T_i^+ \quad (4.5.7)$$

Εάν το σύνολο  $\bar{T}_i^+$  περιέχει περισσότερα του ενός στοιχεία, επιλέγεται η πλέον πρόσφατη χρονική στιγμή η οποία μεγιστοποιεί την υστερητική παράμετρο  $z$ :

$$t_i^+ = \max \left\{ t_j \in \bar{T}_i^+ \mid z(t_j) \geq z(t_k), \forall t_k \in \bar{T}_i^+ \right\} \quad (4.5.8)$$



**Εικόνα 4.5.4: Απόκριση για την σεισμική διέγερση Northridge TAR090 [84] με χρήση του πλέον πρόσφατου σημείου αναστροφής**



**Εικόνα 4.5.5: Απόκριση για την σεισμική διέγερση Northridge TAR090 [84] με χρήση του σημείου αναστροφής που αντιστοιχεί σε μέγιστη μετατόπιση**

Εντούτοις, η διατύπωση αυτή μπορεί να μην είναι αποτελεσματική σε όλες τις περιπτώσεις, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.5.5. Αν και το προσομοίωμα παρουσιάζει την προσδοκώμενη συμπεριφορά κατά την φόρτιση προς την θετική κατεύθυνση (λεπτομέρεια Γ), παρατηρείται ότι η αύξηση της δυσκαμψίας είναι ανεπαρκής στην περιοχή της

λεπτομέρειας  $\Delta$  διότι το τρέχον σημείο μέγιστης αρνητικής μετατόπισης βρίσκεται στην περιοχή της λεπτομέρειας  $E$ .

Είναι σαφές ότι για να καλυφθούν όλες οι περιπτώσεις θα πρέπει να ληφθούν υπόψη πολλαπλά σημεία αναστροφής. Συνεπώς, πρέπει να διερευνηθούν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα σημείο αναστροφής θα θεωρείται «ενεργό» και θα λαμβάνεται υπόψη από το τροποποιημένο προσομοίωμα.

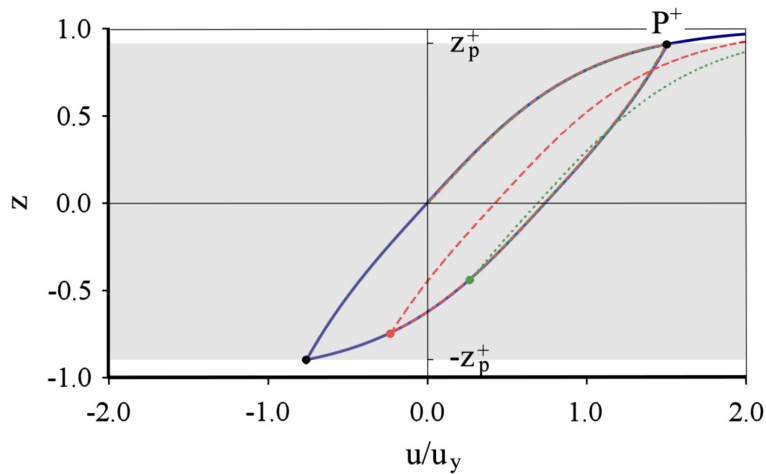
Όταν παρατηρείται ένα σημείο αναστροφής  $P^+(u_p^+, z_p^+)$ , μπορεί να οριστεί μια περιοχή του χώρου  $u-z$  όπου  $z \in (-z_p^+, z_p^+)$ . Για λόγους οι οποίοι θα γίνουν προφανείς στην συνέχεια, αυτή η περιοχή μπορεί να ονομαστεί «ενεργή» περιοχή του σημείου αναστροφής  $P^+$ . Όταν η απόκριση κινείται εντός αυτής της περιοχής (χωρίς να έχει εξέλθει ποτέ ως την τρέχουσα χρονική στιγμή) το σημείο αναστροφής  $P^+$  θα θεωρείται «ενεργό», με την έννοια ότι οποιαδήποτε διαδοχική αποφόρτιση – επαναφόρτιση οδηγεί την απόκριση κάτω από το  $P^+$  (Εικόνα 4.5.6). Στο όριο, μια διαδρομή η οποία ξεκινάει από το  $P^+$  και στην οποία η υστερητική παράμετρος παίρνει διαδοχικά τις τιμές  $z_p^+ \rightarrow -z_p^+ \rightarrow z_p^+$ , θα οδηγείται πίσω στο σημείο  $P^+$  ακριβώς. Η απόδειξη παρουσιάζεται στο Παράρτημα C. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, προκύπτει το συμπέρασμα ότι απαιτείται αύξηση της δυσκαμψίας για διαδρομές μέσα στην «ενεργή» περιοχή του  $P^+$ , ούτως ώστε ενδεχόμενη έξοδος της απόκρισης από αυτή να συμβεί είτε διαμέσου του  $P^+$  είτε πάνω από αυτό. Εάν η υστερητική παράμετρος  $z$  βρεθεί εκτός του διαστήματος  $(-z_p^+, z_p^+)$ , το σημείο  $P^+$  θεωρείται πλέον «ανενεργό» και αγνοείται για το υπόλοιπο της διέγερσης.

Συνεπώς, το σύνολο των «ενεργών» σημείων αναστροφής την χρονική στιγμή  $t_i$  δίνεται ως:

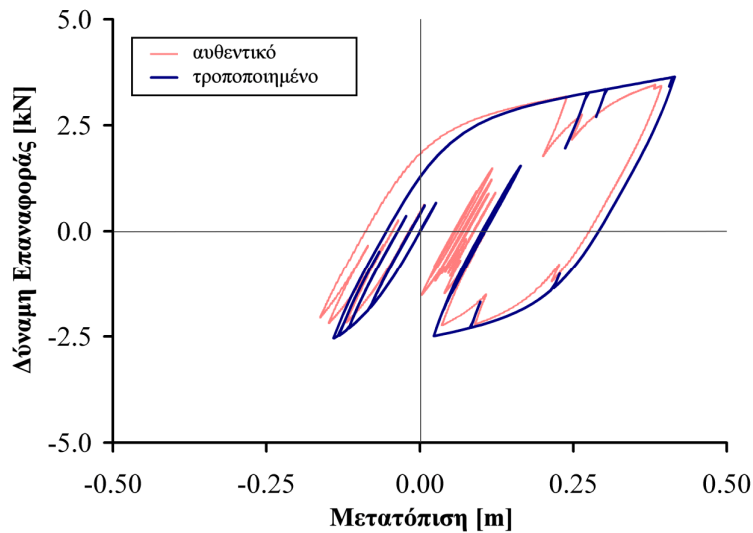
$$\bar{T}_i^+ = \left\{ t_j \in T_i^+ \mid z(t_k) \in (-z(t_j), z(t_j)), \forall t_k \in \{t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_i\} \right\} \subseteq T_i^+ \quad (4.5.9)$$

Το σύνολο (4.5.9) περιέχει τις χρονικές στιγμές όλων των σημείων αναστροφής για τα οποία η απόκριση παραμένει εντός της εκάστοτε «ενεργού» περιοχής από την στιγμή που

πραγματοποιείται η αναστροφή έως την χρονική στιγμή  $t_i$ . Στην συνέχεια, υπολογίζονται οι συντελεστές αύξησης της δυσκαμψίας που αντιστοιχούν σε κάθε  $t_i^+ \in \bar{T}_i^+$  και χρησιμοποιείται ο μεγαλύτερος εξ' αυτών. Με βάση αυτή την διατύπωση, το τροποποιημένο προσομοίωμα παρουσιάζει την προσδοκώμενη συμπεριφορά σε κάθε περίπτωση, αγνοώντας τόσο τα ενδιάμεσα σημεία αναστροφής όσο και τα σημεία αναστροφής κατά το τέλος του φαινομένου (Εικόνα 4.5.7).



Εικόνα 4.5.6: «Ενεργή» περιοχή σημείου αναστροφής  $P^+$ .



Εικόνα 4.5.7: Απόκριση για την σεισμική διέγερση Northridge TAR090 [84] με χρήση πολλαπλών σημείων αναστροφής



Τελικά, με βάση τις σχέσεις (4.5.1), (4.5.4) και (4.5.9) προκύπτει το τροποποιημένο προσομοίωμα το οποίο εξαλείφει τα προβλήματα τα οποία αναλύθηκαν στην §4.4.3. Η αλγοριθμική υλοποίηση του τροποποιημένου προσομοιώματος σε κάθε χρονικό βήμα συνίσταται από:

- Την προσθήκη της έκφρασης αύξησης της δυσκαμψίας στην διαφορική εξίσωση (4.5.1),
- Τον υπολογισμό του συντελεστή αύξησης της δυσκαμψίας  $R_s$ , ο οποίος προκύπτει με βάση τα «ενεργά» σημεία αναστροφής και
- Την επικαιροποίηση των σημείων αναστροφής.

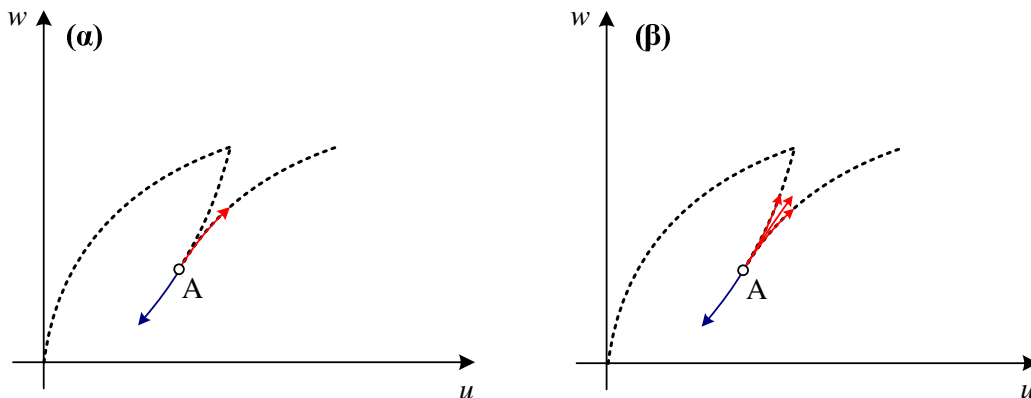
Η επικαιροποίηση των σημείων αναστροφής υλοποιείται εύκολα με την προσθήκη στο σύνολο  $\bar{T}_i^+$  των χρονικών στιγμών που αντιστοιχούν σε νέα σημεία αναστροφής (καθώς αυτά είναι ούτως ή άλλως ενεργά στο επόμενο χρονικό βήμα) και την αφαίρεση απ' αυτό των χρονικών στιγμών που αντιστοιχούν σε σημεία αναστροφής τα οποία πλέον έχουν καταστεί «ανενεργά».

#### 4.5.4 Σύγκριση αρχικού και τροποποιημένου προσομοιώματος

Σε αντίθεση με το αρχικό προσομοίωμα Bouc-Wen, το τροποποιημένο προσομοίωμα παρουσιάζει μη-τοπική μνήμη (§2.3.2). Πράγματι, σε κάθε εφικτή κατάσταση του συστήματος υπάρχει μια απειρία καμπυλών οι οποίες καθορίζουν την μελλοντική εξέλιξη στην περίπτωση της επαναφόρτισης (Εικόνα 4.5.8). Οι καμπύλες αυτές κείτονται μεταξύ του κλάδου αποφόρτισης και του κλάδου φόρτισης του αρχικού προσομοιώματος, ενώ η τελική επιλογή της καμπύλης που θα χρησιμοποιηθεί βασίζεται στον τρέχοντα συντελεστή αύξησης της δυσκαμψίας  $R_s$ . Αυτός εξαρτάται από τα παρελθόντα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης εισόδου.

Σε πρακτικό επίπεδο, με βάση την §4.5.3 είναι προφανές ότι η συνολική απόκριση του τροποποιημένου προσομοιώματος μπορεί να είναι σημαντικά διαφορετική από αυτήν του αρχικού. Οι διαφορές εξαρτώνται από το πλήθος και την έκταση των αναστροφών κίνησης,

ιδιαίτερα αυτών που πραγματοποιούνται όταν το υστερητικό ελατήριο έχει διαρρέυσει. Αυτό φαίνεται καθαρά στην Εικόνα 4.5.7 κατά την φόρτιση προς την θετική κατεύθυνση.



**Εικόνα 4.5.8: Καμπύλες μελλοντικής απόκριση (α) αρχικό προσομοίωμα με τοπική μνήμη (β) τροποποιημένο προσομοίωμα με μη-τοπική μνήμη**

Πέρα από την χρονοϊστορία της απόκρισης, για λόγους σχεδιασμού ενδιαφέρουν και οι μέγιστες τιμές κάποιων χρονοϊστοριών. Η σχετική διαφορά στις μέγιστες τιμές μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\varepsilon = \frac{\max(\bar{y}(t)) - \max(y(t))}{\max(y(t))} \quad (4.5.10)$$

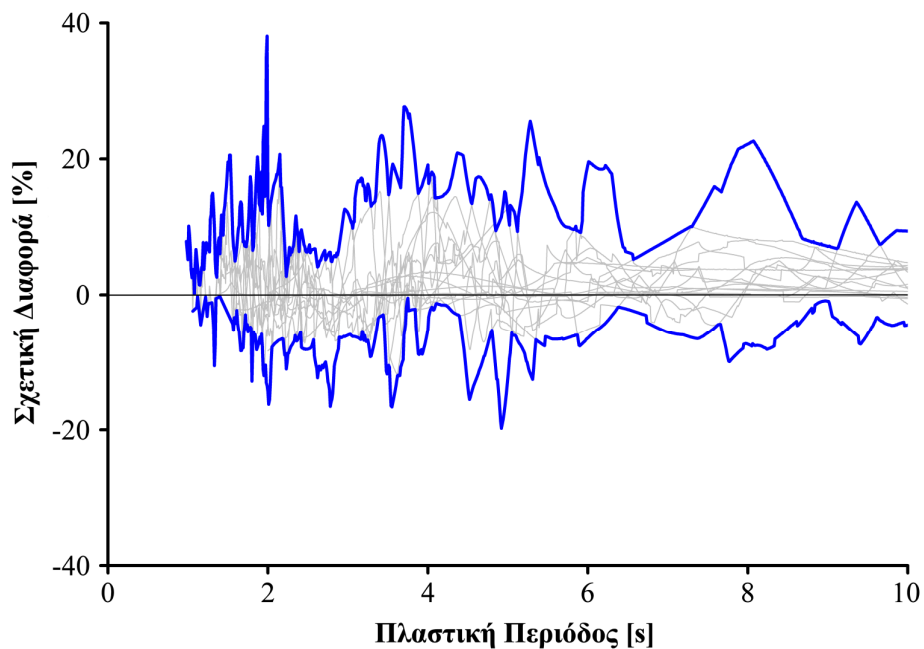
όπου,  $y(t)$  και  $\bar{y}(t)$  είναι οι χρονοϊστορίες οι οποίες αντιστοιχούν στο αρχικό και το τροποποιημένο προσομοίωμα, αντίστοιχα, και η συνάρτηση  $\max(\cdot)$  επιστρέφει την μέγιστη απόλυτη τιμή.

Έστω ένα σύστημα με τα εξής χαρακτηριστικά:  $\gamma = 0.9$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $a = 0.10$ ,  $n = 2.0$ ,  $F_y = 2.86kN$ ,  $u_y = 0.111m$ . Το τροποποιημένο προσομοίωμα βασίζεται σε πολλαπλά σημεία αναστροφής ενώ τίθεται  $p = 2.0$ . Η πλαστική περίοδος του συστήματος ελέγχεται από την μάζα του. Για μια επιλογή 20 σεισμικών διεγέρσεων (Πίνακας 4.5.1), οι περιβάλλουσες των διαφορών στην μέγιστη μετατόπιση και την μέγιστη υστερητική ενέργεια φαίνονται στην Εικόνα 4.5.9 και την Εικόνα 4.5.10, αντίστοιχα. Στα αποτελέσματα αυτά έχουν συμπεριληφθεί μόνον οι περιπτώσεις κατά τις οποίες  $\max(u(t)) \geq u_y$  ή

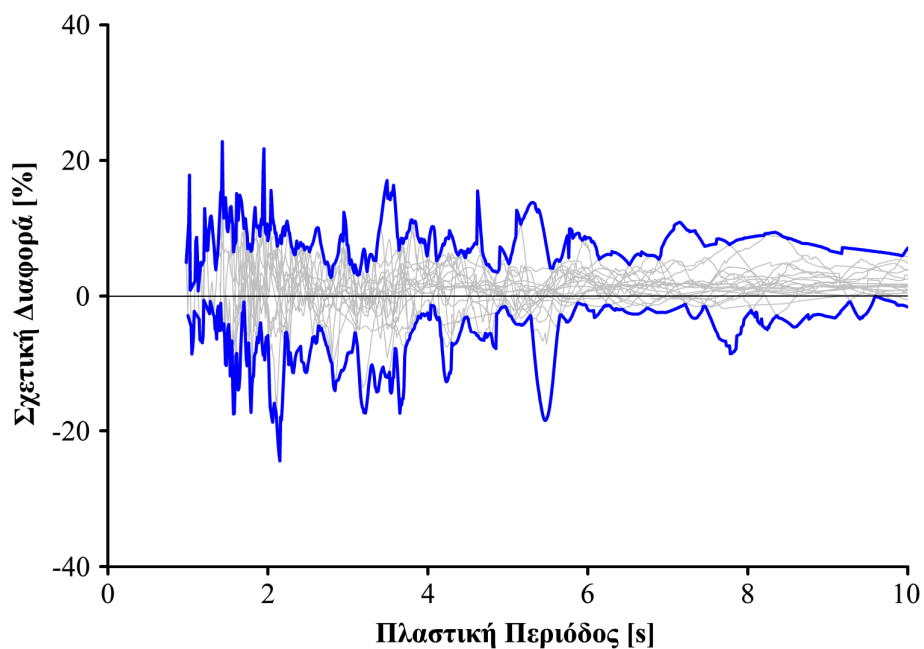
$\max(\bar{u}(t)) \geq u_y$ . Έτσι, έχουν ληφθεί υπόψη μόνον τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε περιπτώσεις σημαντικής υστερητικής απόσβεσης. Για την συγκεκριμένη επιλογή των σεισμικών διεγέρσεων προκύπτει ότι το σχετικό λάθος μπορεί να φτάσει το 38% και το 24% για την μέγιστη μετατόπιση και την μέγιστη υστερητική ενέργεια, αντίστοιχα.

A/A	Τίτλος	PGA (g)	PGV (cm/s)	PGD (cm)
1	ChiChi CHY028 N	0.821	67.0	23.28
2	ChiChi CHY028 W	0.653	72.8	14.68
3	ChiChi TCU084 N	0.417	45.6	21.27
4	ChiChi TCU084 W	1.157	114.7	31.43
5	Kobe Takatori TAK000	0.611	127.1	35.77
6	Kobe Takatori TAK090	0.616	120.7	32.72
7	Northridge Rinaldi RRS228	0.838	166.1	28.78
8	Northridge Rinaldi RRS318	0.472	73.0	19.76
9	Northridge Tarzana TAR090	1.779	113.6	33.22
10	Northridge Tarzana TAR360	0.990	77.6	30.45
11	Kocaeli Duzce DZC180	0.312	58.8	44.11
12	Kocaeli Duzce DZC270	0.358	46.4	17.61
13	Tabas TAB-LN	0.836	97.8	36.92
14	Tabas TAB-TR	0.852	121.4	94.58
15	Imperial Valley I-ELC180	0.313	29.8	13.32
16	Imperial Valley I-ELC270	0.215	30.2	23.91
17	Loma Prieta GPC000	0.563	94.8	41.18
18	Loma Prieta GPC090	0.605	51.0	11.50
19	Erzikan ERZ-NS	0.515	83.9	27.35
20	Erzikan ERZ-EW	0.496	64.3	22.78

**Πίνακας 4.5.1: Καταγραφές σεισμικών διεγέρσεων από PEER [84]**



Εικόνα 4.5.9: Σχετική διαφορά μέγιστης μετατόπισης



Εικόνα 4.5.10: Σχετική διαφορά απορροφηθείσας ενέργειας

Σημειώνεται ότι η διαφορά στην συνολική απόκριση μπορεί να μην αντικατοπτρίζεται στην διαφορά των μέγιστων τιμών. Για παράδειγμα, παρατηρείται συχνά ότι η διαφορά στην μέγιστη μετατόπιση μεταξύ του αρχικού και του τροποποιημένου προσομοιώματος είναι ακριβώς μηδέν. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που η μέγιστη μετατόπιση παρατηρείται κατά την πρώτη φόρτιση προς κάποια κατεύθυνση, δηλαδή χωρίς οποιαδήποτε αύξηση της δυσκαμψίας.

[ΚΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ]

# 5

## Ταυτοποίηση Παραμέτρων





## 5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνεται μια νέα μέθοδος ταυτοποίησης παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen. Εξετάζεται η απόδοσή της με χρήση δεδομένων που προέρχονται τόσο από νοητά όσο και από πραγματικά πειράματα. Εξετάζονται επίσης περιπτώσεις ύπαρξης διαφόρων επιπέδων θορύβου καθώς και ιξώδους απόσβεσης, ενώ αντιμετωπίζεται το σημαντικό θέμα του σχεδιασμού των πειραμάτων. Τέλος, παρουσιάζεται μια συγκριτική μελέτη σε σχέση με άλλες διαδεδομένες μεθόδους ταυτοποίησης, καθώς και μια εκτενής παραμετρική μελέτη η οποία αναδεικνύει τον μηχανισμό λειτουργίας της προτεινόμενης μεθόδου.

## 5.2 Ταυτοποίηση συστήματος

Ως *ταυτοποίηση συστήματος* (system identification) ορίζεται η διαδικασία καθορισμού κατάλληλων μαθηματικών προσομοιωμάτων τα οποία αναπαριστούν την δυναμική συμπεριφορά ενός φυσικού συστήματος με βάση παρατηρούμενα από αυτό δεδομένα [87].

Η διαδικασία της ταυτοποίησης συστήματος επιμερίζεται σε τρεις βασικές ενότητες [87]:

- Την δομή του μαθηματικού προσομοιώματος (model structure),
- Την μέθοδο ταυτοποίησης (identification method),
- Τα παρατηρούμενα δεδομένα (data record).

Η πλέον σημαντική ενότητα είναι η δομή του μαθηματικού προσομοιώματος, η επιλογή του οποίου βασίζεται στα χαρακτηριστικά του φυσικού συστήματος. Σε μερικές περιπτώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν καθιερωμένα γραμμικά προσομοιώματα με παραμέτρους που δεν έχουν φυσική υπόσταση, οπότε το προσομοίωμα λέγεται ότι αποτελεί ένα μαύρο κουτί (black box). Σε άλλες περιπτώσεις, επιλέγονται μαθηματικά προσομοιώματα των οποίων οι παράμετροι αναπαριστούν συγκεκριμένα μακροσκοπικά χαρακτηριστικά του φυσικού συστήματος, οπότε το προσομοίωμα λέγεται ότι αποτελεί ένα γκρι κουτί (gray box) [87]. Στην παρούσα διατριβή, η δομή του μαθηματικού προσομοιώματος είναι καθορισμένη. Το

επιλεχθέν προσομοίωμα (δηλαδή το υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen) θεωρείται ότι μπορεί να αναπαραστήσει επαρκώς όλα τα δυναμικά χαρακτηριστικά των υπό εξέταση φυσικών συστημάτων. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους περιορισμούς (§4.2.2) εξασφαλίζεται η φυσική υπόσταση των παραμέτρων του.

Με δεδομένη την μαθηματική δομή, ορίζεται ως *ταυτοποίηση παραμέτρων* η διαδικασία εύρεσης των άγνωστων τιμών των παραμέτρων του προσομοιώματος. Αυτή συνήθως πραγματοποιείται με κάποια μέθοδο βελτιστοποίησης σε συνδυασμό με μια κατάλληλη αντικειμενική συνάρτηση, η οποία εκφράζει μονοκριτηριακά την ποιότητα της ταυτοποίησης.

Αν και συνήθως ο ρόλος τους παραβλέπεται, μεγάλης σημασίας είναι τα παρατηρούμενα δεδομένα τα οποία θα πρέπει να επιλεγούν κατά τέτοιον τρόπο ώστε να περιέχουν την μέγιστη δυνατή ποσότητα πληροφορίας. Αυτό αποτελεί αντικείμενο της διαδικασίας *σχεδιασμού των πειραμάτων* (experiment design).

Τέλος, μετά την ταυτοποίηση ακολουθεί η *επικύρωση του προσομοιώματος* (model validation). Αυτή περιλαμβάνει διάφορες διαδικασίες που εξετάζουν την καταλληλότητα του προσομοιώματος με βάση κάποια πειράματα ή κάποια προηγούμενη γνώση περί του φυσικού συστήματος. Ενδεχόμενη αποτυχία της επικύρωσης μπορεί να οφείλεται μεταξύ άλλων σε [87]:

- Αποτυχία της μεθόδου ταυτοποίησης να εντοπίσει τις βέλτιστες παραμέτρους του προσομοιώματος με βάση το κριτήριο που έχει επιλεγεί (αντικειμενική συνάρτηση),
- Λανθασμένη επιλογή αντικειμενικής συνάρτησης,
- Λανθασμένη μαθηματική διατύπωση του προσομοιώματος,
- Έλλειψη πληροφορίας στα παρατηρούμενα δεδομένα.

### **5.3 Διατύπωση του προβλήματος**

Η ταυτοποίηση των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen παρουσιάζει εξαιρετικό βαθμό δυσκολίας εξαιτίας της έντονης μη γραμμικότητάς του. Ως αποτέλεσμα, πλήθος

διαφορετικών προσεγγίσεων έχουν παρουσιαστεί κατά καιρούς στην βιβλιογραφία. Για αρκετούς λόγους που θα αναλυθούν στην συνέχεια, οι μέθοδοι αυτές κρίθηκαν ανεπαρκείς.

Είναι επίσης φανερό ότι η σωστή ταυτοποίηση των παραμέτρων έχει μεγάλη σημασία για την ορθότητα της προσομοίωσης και την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων τα οποία προκύπτουν από αυτή.

Έτσι, στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αναπτύχθηκε μια νέα μεθοδολογία ταυτοποίησης παραμέτρων η οποία αντιμετωπίζει κατά ενιαίο τρόπο τα μειονεκτήματα των υφιστάμενων μεθόδων. Η προτεινόμενη μέθοδος βασίζεται σε στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, οι οποίες επιλέχθηκαν εξ αρχής διότι παρουσιάζουν δύο πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα:

- Δεν απαιτούν παραγώγους, δηλαδή ανάλυση ευαισθησίας, κάτι που είναι πολύ σημαντικό στην περίπτωση έντονα μη γραμμικών αντικειμενικών συναρτήσεων,
- Διαθέτουν εγγενή δυνατότητα παράλληλης εκτέλεσης υπολογισμών σε ένα δίκτυο ηλεκτρονικών υπολογιστών (H/Y).

Εξετάστηκαν περιπτώσεις ταυτοποίησης με χρήση δεδομένων που προέρχονται τόσο από νοητά όσο και από πραγματικά πειράματα, με ύπαρξη θορύβου ή χωρίς. Επιπλέον, εξετάστηκαν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες είναι δυνατή η ταυτοποίηση ιξώδους απόσβεσης. Πραγματοποιήθηκε μια εκτενής παραμετρική μελέτη που αναδεικνύει τον ρόλο και την σημασία των διαφόρων συντελεστών της μεθόδου. Επιπλέον, πραγματοποιήθηκε μια συγκριτική μελέτη με άλλες συναφείς μεθόδους ταυτοποίησης. Η προτεινόμενη μέθοδος αποδείχθηκε ότι συνδυάζει καλή απόδοση και εξαιρετική σταθερότητα.

Πέραν των παραπάνω, αντιμετωπίστηκε το σημαντικό θέμα του σχεδιασμού των πειραμάτων, δηλαδή του καθορισμού εκείνων των χαρακτηριστικών τους τα οποία ευνοούν την απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου ταυτοποίησης. Το θέμα αυτό γενικά παραβλέπεται στην βιβλιογραφία, ενώ τα συμπεράσματα της μελέτης αυτής επεκτείνονται αβίαστα και σε

άλλες μεθόδους, καθώς αφορούν τόσο την πληροφορία που περιέχεται στα παρατηρούμενα δεδομένα όσο και την σχετική ευαισθησία των παραμέτρων.

## 5.4 Επισκόπηση μεθόδων ταυτοποίησης

### 5.4.1 Γενικά

Στην βιβλιογραφία έχει παρουσιαστεί ένα πλήθος άρθρων σχετικών με την ταυτοποίηση προσομοιωμάτων Bouc-Wen. Στην συνέχεια παρουσιάζονται με συνοπτικό τρόπο οι κύριες μέθοδοι ταυτοποίησης καθώς και τα βασικά χαρακτηριστικά τους.

### 5.4.2 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Σύμφωνα με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (least squares method), αναζητείται εκείνη η χρονοϊστορία π.χ. της επιτάχυνσης για την οποία ελαχιστοποιείται ένα βαθμωτό μέγεθος της μορφής:

$$OF(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N (y(t_i) - \hat{y}(t_i | \mathbf{p}))^2 \quad (5.4.1)$$

όπου:

- $\mathbf{p}$  το διάνυσμα των παραμέτρων του προσομοιώματος,
- $N$  το πλήθος των χρονικών στιγμών παρατήρησης,
- $y(t_i)$  η παρατηρούμενη χρονοϊστορία,
- $\hat{y}(t_i | \mathbf{p})$  η προβλεπόμενη από το προσομοίωμα χρονοϊστορία που προκύπτει με χρήση του διανύσματος  $\mathbf{p}$ .

Αναζητείται η ελάχιστη τιμή της (5.4.1), η οποία μπορεί να προκύψει με εξίσωση με το μηδέν των μερικών παραγώγων της  $OF(\mathbf{p})$  ως προς τις παραμέτρους του  $\mathbf{p}$ . Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων δίνει τις άγνωστες τιμές των παραμέτρων. Η επίλυση μπορεί να γίνει με διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

### 5.4.3 Μέθοδος μέγιστης πιθανότητας (maximum likelihood method)

Αν γίνει η υπόθεση ότι το σφάλμα  $\varepsilon(t) = y(t_i) - \hat{y}(t_i | \mathbf{p})$  έχει δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (conditional probability density function) η οποία εξαρτάται από τον χρόνο  $t$ , το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  καθώς και τα παρατηρούμενα δεδομένα ενώ δεν υπάρχουν διαταραχές στις εξισώσεις, προκύπτει ότι τα σφάλματα πρόβλεψης για δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους [87]. Θεωρώντας ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του σφάλματος σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή δίνεται από μια τυχαία συνάρτηση  $g$ , η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (joint probability density function) για όλα τα σφάλματα δίνεται από την σχέση:

$$JPDF(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^N g(y(t_i) - \hat{y}(t_i | \mathbf{p})) \quad (5.4.2)$$

Η τιμή της σχέσης (5.4.2) δίνει την πιθανότητα η προβλεπόμενη χρονοϊστορία  $\hat{y}(t_i | \mathbf{p})$  να ταυτίζεται με την παρατηρούμενη χρονοϊστορία. Συνεπώς, αναζητείται εκείνη η τιμή του διανύσματος  $\mathbf{p}$  η οποία μεγιστοποιεί την (5.4.2) και η οποία ονομάζεται εκτίμηση μέγιστης πιθανότητας (maximum likelihood estimate).

### 5.4.4 Extended Kalman Filter (EKF)

Η μέθοδος Extended Kalman Filter (EKF) βασίζεται σε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο για την ταυτοποίηση των άγνωστων παραμέτρων ενός συστήματος. Χρησιμοποιεί ένα εκτενές διάνυσμα κατάστασης (state vector) το οποίο περιλαμβάνει τόσο τις άγνωστες παραμέτρους προς ταυτοποίηση όσο και ολόκληρη την απόκριση και την ταχύτητα του συστήματος. Με βάση μια αρχική εκτίμηση, το διάνυσμα κατάστασης ανανεώνεται με μια επαναληπτική μέθοδο καθώς όλο και περισσότερα δεδομένα γίνονται διαθέσιμα. Η ανανέωση γίνεται με βάση την καθιερωμένη διατύπωση του φίλτρου Kalman [132].

Η μέθοδος EKF γενικά θεωρείται ευαίσθητη στην επιλογή της αρχικής εκτίμησης [133] και όχι ιδιαίτερα αξιόπιστη στην περίπτωση έντονης μη γραμμικότητας [131]. Απαιτείται

γραμμικοποίηση του μητρώου μεταβολής κατάστασης (state transition matrix) και του μητρώου παρατήρησης (observation matrix) με ανάλυση σε σειρά Taylor, με αποτέλεσμα η αξιοπιστία της μεθόδου περιορίζεται σε συστήματα τα οποία είναι σχεδόν γραμμικά για χρονικό διάστημα της τάξης μεγέθους του βήματος ανανέωσης του διανύσματος κατάστασης [134].

#### **5.4.5 Αλγόριθμος Levenberg – Marquardt (LM)**

Ο αλγόριθμος Levenberg – Marquardt (LM) [139], [140] είναι ένας από τους πλέον γνωστούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης. Στην πραγματικότητα πρόκειται για μια έξυπνη μίξη δύο διαφορετικών μεθόδων, ήτοι της μεθόδου μέγιστης κλίσεως (gradient descent method) και της επαναληπτικής μεθόδου Gauss – Newton. Η μέθοδος LM έχει αποδειχθεί ότι υπερτερεί έναντι τόσο της μεθόδου μέγιστης κλίσεως όσο και της μεθόδου συζυγών κλίσεων (conjugate gradient method) για ένα μεγάλο πλήθος εφαρμογών [141].

#### **5.4.6 Κλασικός Γενετικός Αλγόριθμος (Standard-GA)**

Μια από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους βελτιστοποίησης είναι Γενετικοί Αλγόριθμοι (Genetic Algorithms – GAs) [88], [89], [90], [91]. Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι είναι μια στοχαστική μέθοδος εξέλιξης ενός πλήθους ατόμων. Κάθε άτομο αντιστοιχεί κατά μοναδικό τρόπο σε μια πιθανή λύση ενός προβλήματος.

Ο Κλασικός Γενετικός Αλγόριθμος (Standard-GA) αποτελεί την βασική μορφή των Γενετικών Αλγορίθμων. Κάθε μεταβλητή σχεδιασμού κωδικοποιείται στο δυαδικό σύστημα ως μια πεπερασμένη ακολουθία των φυσικών αριθμών 0 και 1. Η ακολουθία αυτή αποτελεί ένα *γονίδιο* το οποίο αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη μεταβλητή σχεδιασμού. Το διατεταγμένο σύνολο όλων των γονιδίων συνιστά το *χρωμόσωμα* του ατόμου. Συνεπώς, το χρωμόσωμα είναι μια κωδικοποιημένη σειρά δυφίων η οποία αναπαριστά τις «συντεταγμένες» ενός συγκεκριμένου σημείου στον χώρο των λύσεων ενός προβλήματος.

Η εξέλιξη επιτυγχάνεται με εφαρμογή συγκεκριμένων *τελεστών* στα άτομα του τρέχοντος πληθυσμού ούτως ώστε να προκύψουν τα άτομα του νέου πληθυσμού, δηλαδή η επόμενη γενεά. Οι βασικοί τελεστές είναι οι παρακάτω:

- 1) *Επιλογή* (selection): Πρόκειται για την διαδικασία επιλογής ενός ατόμου του τρέχοντος πληθυσμού για διασταύρωση, δηλαδή για χρήση του γενετικού υλικού του. Η διαδικασία επιλογής βασίζεται στην *ευρωστία* του ατόμου, δηλαδή το κατά πόσο η λύση που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο άτομο είναι «καλή» με κριτήριο την χρησιμοποιούμενη αντικειμενική συνάρτηση. Στα πιο εύρωστα άτομα ορίζεται υψηλότερη πιθανότητα επιλογής και συνεπώς αυτά αναμένεται να έχουν περισσότερους απογόνους στην επόμενη γενεά.
- 2) *Διασταύρωση* (crossover): Πρόκειται για την διαδικασία ανάμιξης του γενετικού υλικού γονέων (parents) για την παραγωγή παιδιών (offspring) τα οποία θα αποτελέσουν τα άτομα της επόμενης γενεάς.
- 3) *Μετάλλαξη* (mutation): Πρόκειται για την διαδικασία εισαγωγής λαθών κατά την αντιγραφή του γενετικού υλικού. Η εισαγωγή των λαθών πραγματοποιείται κατά τυχαίο τρόπο. Με τη βοήθεια του τελεστή αυτού εισάγονται νέες ακολουθίες γενετικού υλικού στον πληθυσμό και εξασφαλίζεται ότι ο Γενετικός Αλγόριθμος θα εντοπίσει το ολικό ακρότατο σε πεπερασμένο χρόνο [96].

Σε μορφή ψευδοκώδικα, τα τυπικά βήματα εκτέλεσης των Γενετικών Αλγορίθμων είναι τα εξής:

- 1) Τυχαία παραγωγή χρωμοσωμάτων για την μόρφωση του αρχικού πληθυσμού,
- 2) Υπολογισμός της ευρωστίας κάθε ατόμου του πληθυσμού,
- 3) Επιλογή ατόμων για χρήση του γενετικού υλικού τους,
- 4) Διασταύρωση,
- 5) Μετάλλαξη,

6) Υπολογισμός της ευρωστίας κάθε ατόμου του νέου πληθυσμού και έλεγχος της συνθήκης τερματισμού. Αν η συνθήκη τερματισμού ικανοποιείται τότε η διαδικασία τερματίζεται αλλιώς γίνεται επιστροφή στο βήμα (3).

Πέραν των τριών βασικών τελεστών του Standard-GA, είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη η χρήση του *ελιτισμού*. Ο ελιτισμός είναι ένας τελεστής ο οποίος μεταφέρει το πλέον εύρωστο άτομο (ή ένα πλήθος εύρωστων ατόμων) αυτούσιο στην επόμενη γενεά. Κατά αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι εάν προκύψει μια πολύ καλή λύση, αυτή δεν θα εξαφανισθεί στην επόμενη γενεά. Αν και σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δυνατό να οδηγήσει στην παγίδευση του αλγορίθμου σε κάποιο τοπικό βέλτιστο, η χρήση του τελεστή αυτού συνήθως αυξάνει την απόδοση [95].

Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι έχουν χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε προβλήματα βελτιστοποίησης π.χ. [92], [93], [94], [96]. Βασικότερες αιτίες της ευρείας χρήσης τους είναι η απλότητα, η αυξημένη απόδοση σε δύσκολα προβλήματα βελτιστοποίησης, η δυνατότητα αντιμετώπισης προβλημάτων για κάθε τύπο μεταβλητής σχεδιασμού καθώς και η μη ύπαρξη περιορισμών αναφορικά με τη συνέχεια ή την ύπαρξη παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης και των συναρτήσεων των περιορισμών. Μειονέκτημα της μεθόδου θεωρείται το υψηλό υπολογιστικό κόστος.

#### **5.4.7 Μικρο-γενετικός αλγόριθμος (Micro-GA)**

Ο μικρο-γενετικός αλγόριθμος (Micro-GA) αποτελεί μια παραλλαγή των Γενετικών Αλγορίθμων. Προτάθηκε από τον Goldberg [124] και υλοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους De Jong [136] και Krishnakumar [125]. Στην συνέχεια τροποποιήθηκε από τον Carroll [137] και άλλους, π.χ. Kwon et al. [138]. Σύμφωνα με τον De Jong [136], ο Micro-GA παρουσιάζει υψηλότερη απόδοση κατά το αρχικό και τελικό στάδιο της βελτιστοποίησης. Ο Micro-GA διαφοροποιείται από τον Standard-GA στα παρακάτω σημεία:

- Το μέγεθος του πληθυσμού είναι μικρό (τυπικά 4 ως 6 άτομα),
- Δεν εφαρμόζεται ο τελεστής της μετάλλαξης,



- Ο τελεστής της διασταύρωσης εφαρμόζεται με πιθανότητα ίση με την μονάδα,
- Εφαρμόζεται ο τελεστής του ελιτισμού,
- Ο πληθυσμός αρχικοποιείται όταν η ποικιλότητα του πληθυσμού πέσει κάτω από μια συγκεκριμένη τιμή κατωφλίου. Η αρχικοποίηση πραγματοποιείται διατηρώντας την πλέον εύρωστη λύση και συμπληρώνοντας τον υπόλοιπο πληθυσμό με νέες τυχαίες λύσεις. Τυπικά, η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται όταν η ομοιομορφία του γενετικού υλικού ξεπεράσει το 80-90%.

Πλεονέκτημα του Micro-GA είναι η ικανότητα του να αντιμετωπίζει με επιτυχία προβλήματα με μεγάλο πλήθος τοπικών ακρότατων. Αυτό οφείλεται στην αρχικοποίηση του πληθυσμού, η οποία μειώνει την πιθανότητα εγκλωβισμού της μεθόδου σε τοπικά βέλτιστα.

#### 5.4.8 Αλγόριθμος Διαφορικής Εξέλιξης (Differential Evolution)

Ο αλγόριθμος Διαφορικής Εξέλιξης (Differential Evolution - DE) προτάθηκε από τους Storn και Price [97]. Πρόκειται για έναν σχετικά νέο και αποδοτικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης ο οποίος βασίζεται στην εξέλιξη ενός πληθυσμού πιθανών λύσεων.

Στην βασική μορφή του αλγόριθμου, υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός αποτελείται από  $NP$  διανύσματα διάστασης  $D$ . Τα άτομα του πληθυσμού  $G$  δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_{i,G} \\ & i = 1, 2, \dots, NP \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Στην αρχή της διαδικασίας πραγματοποιείται αρχικοποίηση του πληθυσμού με εισαγωγή τυχαίων λύσεων. Θα πρέπει να ληφθεί μέριμνα ώστε οι λύσεις αυτές να είναι αφ' ενός εφικτές και αφ' ετέρου διασκορπισμένες ομοιόμορφα στον χώρο των λύσεων.

Οι βασικοί τελεστές εξέλιξης είναι οι εξής (Εικόνα 5.4.1):

- 1) Μετάλλαξη (mutation): Υποθέτουμε ότι η γενεά  $G$  έχει μορφωθεί. Τότε για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{x}_{i,G}$   $i = 1, 2, \dots, NP$  μπορεί να κατασκευαστεί ένα «μεταλλαγμένο» διάνυσμα σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{u}_{i,G+1} = \mathbf{x}_{r_1,G} + F(\mathbf{x}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G}) \quad (5.4.4)$$

όπου:

- $r_1, r_2, r_3 \in \{1, 2, \dots, NP\}$  τυχαίοι ακέραιοι δείκτες οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους αλλά και διαφορετικοί από τον δείκτη  $i$ ,
  - $F \in [0, 2]$  σταθερός συντελεστής της μεθόδου, καθοριζόμενος από τον χρήστη.
- 2) Διασταύρωση (crossover): Για την αύξηση της ποικιλότητας στον πληθυσμό, μορφώνεται ένα δοκιμαστικό διάνυσμα σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{u}_{i,G+1} = \{u_{1i,G+1}, u_{2i,G+1}, \dots, u_{Di,G+1}\} \quad (5.4.5)$$

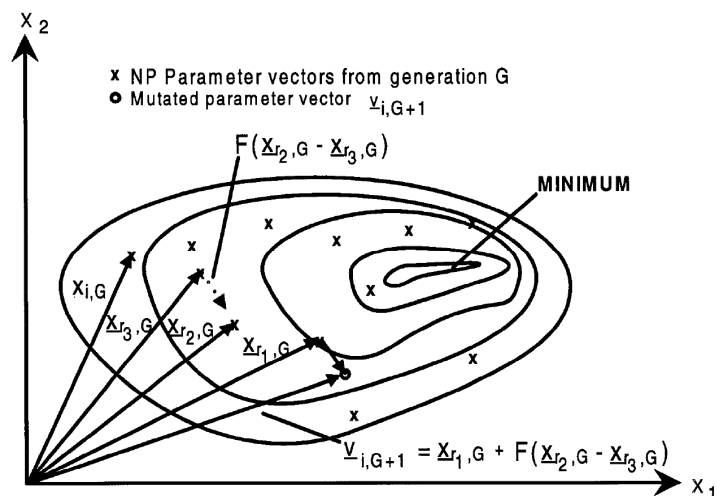
όπου:

$$u_{ji,G+1} = \begin{cases} u_{ji,G+1}, & \text{if } (randb(j) \leq CR) \text{ or } (j = rnbr(i)) \\ x_{ji,G}, & \text{if } (randb(j) > CR) \text{ and } (j \neq rnbr(i)) \end{cases} \quad (5.4.6)$$

$$j = 1, 2, \dots, D$$

όπου:

- $randb(j)$  η  $j$ -στή διαδοχική τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0, 1]$ ,
  - $CR \in [0, 1]$  συντελεστής καθοριζόμενος από τον χρήστη,
  - $rnbr(i)$  τυχαίος ακέραιος δείκτης ο οποίος παίρνει τιμές από το σύνολο  $\{1, 2, \dots, D\}$ .
- 3) Επιλογή (selection): Το δοκιμαστικό διάνυσμα  $\mathbf{u}_{i,G+1}$  συγκρίνεται απ' ευθείας με το διάνυσμα  $\mathbf{x}_{i,G}$ . Το πλέον εύρωστο εκ των δύο λαμβάνει την θέση  $i$  του πληθυσμού  $G+1$ .



**Εικόνα 5.4.1: Παράδειγμα δισδιάστατης αντικειμενικής συνάρτησης και δημιουργία διανύσματος  $u_{i,G+1}$  [97]**

Ο αλγόριθμος DE έχει το πλεονέκτημα ότι είναι εξαιρετικά απλός στην υλοποίηση ενώ γενικά δεν είναι ευαίσθητος στην επιλογή των τιμών των συντελεστών του. Επιπλέον, φαίνεται ότι υπερτερεί του αλγόριθμου Particle Swarm Optimization (§5.4.9) για ένα μεγάλο πλήθος προβλημάτων [105], [106]. Τέλος, μελέτες υποδεικνύουν ότι ο αλγόριθμος DE υπερτερεί ενός σχετικά απλού Γενετικού Αλγόριθμου με την εξαίρεση περιπτώσεων όπου τα δεδομένα περιέχουν θόρυβο [105], [107].

#### 5.4.9 Βελτιστοποίηση Σμήνους Σωματιδίων (Particle Swarm Optimization)

Ο αλγόριθμος Βελτιστοποίησης Σμήνους Σωματιδίων (Particle Swarm Optimization - PSO) είναι μια σχετικά νέα και αποδοτική μέθοδος βελτιστοποίησης η οποία προτάθηκε από τους Eberhart και Kennedy [98] και στην συνέχεια μελετήθηκε από πλήθος ερευνητών, π.χ. [99], [100], [101]. Είναι εμπνευσμένος από την κοινωνική συμπεριφορά των ατόμων ενός σμήνους πτηνών ή μιας ομάδας ζώων τα οποία κινούνται με σκοπό την απόκτηση τροφής. Η συμπεριφορά των ατόμων επηρεάζεται τόσο από την προηγούμενη εμπειρία τους όσο και από πληροφορίες που λαμβάνουν από την ομάδα.

Στην βασική μορφή του αλγορίθμου, υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός αποτελείται από  $p$  άτομα. Κάθε άτομο καταλαμβάνει μια θέση και κινείται με κάποια ταχύτητα. Οι ιδιότητες αυτές καθορίζονται την χρονική στιγμή  $k$  από τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης  $\mathbf{x}_k$  και ταχύτητας  $\mathbf{v}_k$ . Η θέση του ατόμου  $d$  στην επόμενη χρονική στιγμή  $k+1$  προκύπτει ως εξής:

$$\mathbf{x}_{k+1}^d = \mathbf{x}_k^d + \mathbf{v}_{k+1}^d \quad (5.4.7)$$

όπου το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  μεταξύ των διακριτών χρονικών στιγμών έχει ληφθεί συμβατικά ίσο με την μονάδα ώστε να είναι επιτρεπτές οι αλγεβρικές πράξεις μεταξύ διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας. Το διάνυσμα της ταχύτητας καθορίζεται από την σχέση:

$$\mathbf{v}_{k+1}^d = \mathbf{v}_k^d + c_1 r_1 (\mathbf{p}_k^d - \mathbf{x}_k^d) + c_2 r_2 (\mathbf{p}_k^g - \mathbf{x}_k^d) \quad (5.4.8)$$

όπου:

- $\mathbf{p}_k^d$  η βέλτιστη προγενέστερη θέση του ατόμου  $d$  την χρονική στιγμή  $k$ ,
- $\mathbf{p}_k^g$  η βέλτιστη θέση των ατόμων όλου του σμήνους την χρονική στιγμή  $k$ ,
- $r_1, r_2$  τιμές τυχαίας μεταβλητής με ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0,1]$ ,
- $c_1, c_2 > 0$  συντελεστές της μεθόδου.

Σχετικά με τους συντελεστές, οι Eberhart και Kennedy προτείνουν  $c_1 = c_2 = 2$ . Γενικά, όμως επιλέγεται  $c_1 + c_2 \cong 4$ , όπου η ανισοτική σχέση μεταξύ  $c_1$  και  $c_2$  καθορίζει την συμπεριφορά των ατόμων. Όταν  $c_1 < c_2$  η συμπεριφορά των ατόμων είναι πιο κοινωνική (social) ενώ όταν  $c_1 > c_2$  η συμπεριφορά είναι πιο εγωιστική (cognitive).

Οι Shi και Eberhart [99] πρότειναν την εισαγωγή ενός «συντελεστή αδράνειας»  $w$ , όπου η σχέση (5.4.8) τροποποιείται ως:

$$\mathbf{v}_{k+1}^d = w \mathbf{v}_k^d + c_1 r_1 (\mathbf{p}_k^d - \mathbf{x}_k^d) + c_2 r_2 (\mathbf{p}_k^g - \mathbf{x}_k^d) \quad (5.4.9)$$

Σχετικά με τον συντελεστή αδράνειας, προτείνεται  $0.8 < w < 1.4$ , ενώ έχει αναφερθεί ότι η απόδοση του αλγόριθμου αυξάνεται όταν εφαρμόζεται σταδιακή μείωση του  $w$  [99].

Πέραν των προαναφερθέντων, έχουν προταθεί διάφοροι τελεστές όπως ο «παραλογισμός» (craziness) [98], ο ελιτισμός τόσο στα άτομα (elite particle) όσο και στην ταχύτητα (elite velocity) [99], η χρήση της βέλτιστης θέσης  $\mathbf{p}_g$  η οποία έχει καταγραφεί γενικά στο σμήνος αντί της βέλτιστης θέσης  $\mathbf{p}_k^g$  που καταγράφεται στο σμήνος την χρονική στιγμή  $k$  [100], η εφαρμογή άνω ορίου στις ταχύτητες των ατόμων [100], η δυναμική μείωση του συντελεστή αδράνειας  $w$  [102], η «σύσφιξη» (constriction) των μέγιστων ταχυτήτων [104] κ.α.

Η μέθοδος είναι ιδιαίτερα προσφιλής τα τελευταία χρόνια διότι συνδυάζει απλότητα και καλή απόδοση. Λόγω της σχετικής νεότητάς της, δεν έχει ακόμη παγιωθεί κάποια μορφή η οποία να θεωρείται «κλασική» ενώ παραμένει εν γένει ασαφής ακόμη και ο μηχανισμός λειτουργίας της [103]. Από την άλλη πλευρά, μελέτες υποδεικνύουν ότι συγκρινόμενος με τον αλγόριθμο DE (§5.4.8) ο αλγόριθμος PSO παρουσιάζει σημαντικά μεγαλύτερη ευαισθησία στους συντελεστές και υποδεέστερη απόδοση για ένα μεγάλο πλήθος προβλημάτων [105].

## 5.5 Επισκόπηση υφιστάμενου ερευνητικού έργου

### 5.5.1 Γενικά

Στην βιβλιογραφία υπάρχει ένα πλήθος άρθρων σχετικών με την ταυτοποίηση των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen. Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι κυριότερες εργασίες πάνω στο θέμα.

### 5.5.2 Yar και Hammond (1987)

Οι Yar και Hammond [116] παρουσίασαν μια μέθοδο ταυτοποίησης παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen η οποία βασίζεται στην μέθοδο Gauss-Newton για την επίλυση των εξισώσεων της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων (§5.4.2). Η εξίσωση της κίνησης δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$m \ddot{x}(t) + a \dot{x}(t) + b x(t) + z(t) = f(t) \quad (5.5.1)$$

όπου

- $x(t)$  η μετατόπιση,
- $f(t)$  η δύναμη διέγερσης,
- $a$  ο γραμμικός συντελεστής ιξώδους απόσβεσης, με μονάδες δύναμη προς ταχύτητα,
- $b$  η σταθερά του γραμμικώς ελαστικού ελατηρίου, με μονάδες δύναμη προς μετατόπιση,
- $z$  η υστερητική δύναμη,
- $m$  η μάζα του συστήματος.

Σημειώνεται ότι στο άρθρο [116] η μάζα θεωρήθηκε μοναδιαία. Η υστερητική παράμετρος ακολουθεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση με μηδενική αρχική συνθήκη:

$$\dot{z}(t) = A \dot{x}(t) - \gamma |\dot{x}(t)| |z(t)| |z(t)|^{n-1} - \beta \dot{x}(t) |z(t)|^n \quad (5.5.2)$$

Το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων δίνεται ως  $\theta = \{a \ b \ A \ \beta \ \gamma \ n\}^T$ . Λόγω της μεθόδου υλοποίησης, απαιτείται μια καλή αρχική εκτίμηση του  $\theta$ . Για αυτόν τον λόγο, η ταυτοποίηση πραγματοποιείται σε δύο στάδια.

Στο πρώτο στάδιο γίνεται μια αρχική εκτίμηση της εκθετικής παραμέτρου  $n$ , έστω  $n_0$ , η οποία και παραμένει σταθερή. Στην συνέχεια ελαχιστοποιείται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τις υπόλοιπες παραμέτρους  $a, b, A, \beta, \gamma$ . Αυτή η διαδικασία προϋποθέτει με την σειρά της μια καλή αρχική εκτίμηση του διανύσματος των άγνωστων παραμέτρων  $\tilde{\theta} = \{a \ b \ A \ \beta \ \gamma\}^T$ , η οποία πραγματοποιείται με εκτίμηση των τιμών των  $a, b$ .

Στο δεύτερο στάδιο, ελαχιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση και για τους έξι αγνώστους, χρησιμοποιώντας ως αρχικό  $\theta$  το τελικό αποτέλεσμα του πρώτου σταδίου και την τιμή  $n_0$ . Εάν δεν πραγματοποιηθεί σύγκλιση στις σωστές τιμές των παραμέτρων, τότε αυτό μάλλον οφείλεται σε κακή αρχική εκτίμηση της εκθετικής παραμέτρου  $n$ .

Με βάση τα παραπάνω, αλλά και τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν [116], είναι φανερό ότι η μέθοδος είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στις αρχικές εκτιμήσεις των τιμών των παραμέτρων και απαιτεί εξοικείωση και έντονο πειραματισμό. Επιπλέον, η μη σύγκλιση του αλγορίθμου αποτελεί σύνηθες φαινόμενο.

### 5.5.3 Sues et al. (1988)

Οι Sues et al. [114] παρουσίασαν μια μέθοδο ταυτοποίησης παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen η οποία βασίζεται στη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (§5.4.2). Η δύναμη επαναφοράς δίνεται από την σχέση:

$$q = a k u + (1 - a) k z \quad (5.5.3)$$

όπου:

- $k$  η αρχική δυσκαμψία,
- $a$  ο λόγος της μετελαστικής δυσκαμψίας προς την αρχική,
- $z$  η υστερητική μετατόπιση, η οποία ακολουθεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση με μηδενική αρχική συνθήκη:

$$\dot{z} = A \dot{u} - \beta |\dot{u}| |z|^{n-1} z - \gamma \dot{u} |z|^n \quad (5.5.4)$$

όπου:

- $A, \beta, \gamma, n$  παράμετροι του προσομοιώματος.

Η εκθετική παράμετρος  $n$  θεωρείται σε κάθε περίπτωση γνωστή και δεν ταυτοποιείται. Αντιθέτως, προτείνεται η διενέργεια πλήθους ταυτοποιήσεων με διαφορετική τιμή του  $n$  κάθε φορά, από τις οποίες θα προκύψει η καλύτερη λύση. Επίσης, δεν γίνεται αναφορά για την ταυτοποίηση της παραμέτρου  $a$ . Εξετάστηκαν προβλήματα ταυτοποίησης των τριών παραμέτρων  $A, \beta, \gamma$ , τα οποία στις περισσότερες περιπτώσεις επιλύθηκαν επιτυχώς. Επιπλέον, διερευνήθηκε και η χρήση ενός τροποποιημένου προσομοιώματος Bouc-Wen το

οποίο να λαμβάνει υπόψη φαινόμενα μείωσης της αντοχής και της δυσκαμψίας. Σε κάθε περίπτωση όμως, το πλήθος των άγνωστων παραμέτρων δεν υπερβαίνει τις τέσσερις, με τις υπόλοιπες παραμέτρους να θεωρούνται γνωστές. Τέλος, δεν εξετάστηκε το θέμα του θορύβου που εμπεριέχεται στα παρατηρούμενα δεδομένα.

#### **5.5.4 Lin και Zhang (1994)**

Οι Lin και Zhang [117] χρησιμοποίησαν μια μέθοδο ταυτοποίησης που βασίζεται στον αλγόριθμο EKF (§5.4.4). Η εξίσωση της κίνησης παίρνει την μορφή:

$$m \ddot{x} + k z = -m \ddot{u}_g \quad (5.5.5)$$

όπου:

- $x(t)$  η μετατόπιση,
- $m$  η μάζα,
- $k$  η δυσκαμψία,
- $z(t)$  η υστερητική μετατόπιση, η οποία ακολουθεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση με μηδενική αρχική συνθήκη:

$$\dot{z} = A - \beta |\dot{x}| |z|^{n-1} z - \gamma \dot{x} |z|^n \quad (5.5.6)$$

- $(\dot{\phantom{x}})$  ο τελεστής της παραγώγισης ως προς τον χρόνο.
- $A, \beta, \gamma$  παράμετροι του προσομοιώματος.

Από την μορφή της εξίσωσης (5.5.5) είναι φανερό ότι δεν λαμβάνονται υπόψη φαινόμενα ιξώδους φύσης. Επιπλέον, θεωρήθηκε γνωστή η ποσότητα  $k/m$  ενώ τέθηκε και  $n=1$ . Η ταυτοποίηση αφορούσε μόνο τις παραμέτρους  $A, \beta$  και  $\gamma$ . Για να αντιμετωπιστούν προβλήματα σύγκλισης χρησιμοποιήθηκε μια γενική επαναληπτική μέθοδος με συντελεστές βάρους (weighted global iteration procedure). Σε περίπτωση απουσίας θορύβου, η μέθοδος αναφέρθηκε ότι δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στην επιλογή των



αρχικών συνθηκών. Σε κάθε περίπτωση, η ταυτοποίηση απαιτεί κάποιο ελάχιστο επίπεδο έντασης της διέγερσης ώστε το σύστημα να εισέλθει στην μη γραμμική περιοχή απόκρισης.

### 5.5.5 Kunnath et al. (1997)

Οι Kunnath et al. [111] παρουσίασαν μια μέθοδο ταυτοποίησης παραμέτρων η οποία βασίζεται σε μια τροποποιημένη επαναληπτική μέθοδο Gauss-Newton. Το προσομοίωμα που χρησιμοποίησαν περιλαμβάνει φαινόμενα μείωσης της αντοχής, μείωσης της δυσκαμψίας και στένωσης του διαγράμματος δύναμης – παραμόρφωσης. Στην εν λόγω μέθοδο, η δύναμη επαναφοράς δίνεται ως εξής:

$$F(t) = a k u(t) + (1 - a) k Z(t) \quad (5.5.7)$$

όπου:

- $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$  η συνολική μετατόπιση, η οποία εκφράζεται ως άθροισμα των μετατοπίσεων λόγω υστέρησης ( $u_1$ ) και ολίσθησης ( $u_2$ ),
- $k$  η αρχική δυσκαμψία,
- $a$  ο λόγος της μετελαστικής δυσκαμψίας προς την αρχική,
- $Z(t)$  η υστερητική μετατόπιση, η οποία ακολουθεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση με μηδενική αρχική συνθήκη:

$$\dot{Z} = \frac{A - \nu |Z|^n [\beta \text{sign}(u_1 Z) + \gamma]}{\eta} \dot{u}_1 \quad (5.5.8)$$

όπου:

- $A, \beta, \gamma$  παράμετροι του βασικού προσομοιώματος,
- $\eta(t) = 1.0 + S_k \varepsilon_T, \nu(t) = 1.0 + S_f \varepsilon_T$  συναρτήσεις που καθορίζουν την εξέλιξη της μείωσης της δυσκαμψίας και της αντοχής, αντίστοιχα,

- $S_k, S_f$  παράμετροι που καθορίζουν τον ρυθμό μείωσης της δυσκαμψίας και της αντοχής, αντίστοιχα,
- $\varepsilon_T = (1-a)k Z \dot{u}$ .

Η μετατόπιση λόγω ολίσθησης καθορίζεται από την σχέση:

$$\dot{u}_2 = \frac{|\mu|^{S_m} S_c}{S_b} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[ -\frac{(Z - S_t S_b)^2}{2S_b^2} \right] \quad (5.5.9)$$

όπου:

- $\mu$  η πλαστιμότητα,
- $S_c, S_b, S_m, S_t$  παράμετροι που καθορίζουν την στένωση του διαγράμματος δύναμης – παραμόρφωσης.

Στην εν λόγω μέθοδο έγινε διαχωρισμός των παραμέτρων του προσομοιώματος σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις παραμέτρους που καθορίζουν την απόκριση του προσομοιώματος σε μονοτονική φόρτιση, ενώ η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τις παραμέτρους που καθορίζουν την απόκριση σε ανακυκλιζόμενη φόρτιση. Από τις παραμέτρους της πρώτης κατηγορίας θεωρήθηκαν γνωστές (δηλαδή δεν ταυτοποιήθηκαν) οι παράμετροι  $A=1$ ,  $\beta=0.05$ ,  $\gamma=0.95$ , καθώς και η εκθετική παράμετρος  $n=2$ . Η ταυτοποίηση των υπολοίπων παραμέτρων της πρώτης κατηγορίας πραγματοποιείται με χρήση δεδομένων τα οποία αντιστοιχούν μόνο σε τοπικά μέγιστα των δυνάμεων. Στην συνέχεια, γίνεται ξεχωριστά η ταυτοποίηση των παραμέτρων της δεύτερης κατηγορίας.

Εξετάστηκαν διάφορες περιπτώσεις ταυτοποίησης με χρήση πειραματικών δεδομένων. Αναφέρθηκαν προβλήματα σύγκλισης σε ασύμμετρα συστήματα, δηλαδή σε συστήματα με διαφορετική δύναμη διαρροής στην θετική και την αρνητική κατεύθυνση. Επίσης, αναφέρθηκαν προβλήματα αργής σύγκλισης της απλής μεθόδου Gauss-Newton, τα οποία οδήγησαν στην εισαγωγή τροποποιήσεων για να επιτευχθεί καλύτερη απόδοση. Δεν

εξετάστηκε η ακρίβεια της μεθόδου με νοητά πειράματα στα οποία οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων είναι γνωστές. Επιπλέον, δεν εξετάστηκε η συμπεριφορά της μεθόδου σε περίπτωση δεδομένων με θόρυβο.

### 5.5.6 Ni et al. (1998)

Οι Ni et al. [113] παρουσίασαν μια μέθοδο ταυτοποίησης των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen η οποία βασίζεται σε μια μέθοδο πεδίου συχνοτήτων (frequency domain method). Η δύναμη επαναφοράς δίνεται από την σχέση:

$$r(t) = b x(t) + z(t) \quad (5.5.10)$$

όπου  $z(t)$  η υστερητική δύναμη, η οποία ακολουθεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση με μηδενική αρχική συνθήκη:

$$\dot{z}(t) = a \dot{x}(t) - \beta |\dot{x}(t)| |z(t)| |z(t)|^{n-1} - \gamma \dot{x}(t) |z(t)|^n \quad (5.5.11)$$

Το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων προς ταυτοποίηση δίνεται ως  $\mathbf{y} = \{b \ a \ \beta \ \gamma \ n\}^T$ . Εξετάστηκαν περιπτώσεις απόκρισης που αντιστοιχούν σε αρμονικές διεγέρσεις με 1 ή 8 κύκλους φόρτισης και διάφορα επίπεδα θορύβου. Γίνεται ιδιαίτερη μνεία για το ζεύγος των παραμέτρων  $\beta$  και  $\gamma$ . Συμπεραίνεται ότι, εφόσον το άθροισμά τους είναι ίσο με την μονάδα, οι επιμέρους τιμές δεν έχουν σημαντική επίδραση στην απόκριση. Υπό αυτήν την έννοια, αν και τα αποτελέσματα της ταυτοποίησης αυτών των δύο παραμέτρων μπορεί να διαφέρουν σημαντικά από τις πραγματικές τιμές, εντούτοις η ταυτοποίηση θεωρείται επιτυχής. Τέλος, πραγματοποιήθηκε μια ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων και έγινε εφαρμογή της μεθόδου στην περίπτωση συστημάτων σεισμικής μόνωσης με καλώδια (wire-cable isolators) με ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Σημειώνεται ότι η απαίτηση σχετικά με το άθροισμα των παραμέτρων  $\beta$  και  $\gamma$  σχετίζεται με την *συνέπεια του προσομοιώματος από φυσικής άποψης*, κάτι το οποίο έχει αναλυθεί στην §4.2.2. Αντίθετα, η μικρή επίδραση των επιμέρους τιμών των παραμέτρων  $\beta$

και  $\gamma$  στην απόκριση οφείλεται στην *μικρή ευαισθησία τους*, η οποία οφείλεται, μεταξύ άλλων, και στην διέγερση που χρησιμοποιείται.

### 5.5.7 Kyprianou et al. (2001)

Οι Kyprianou et al. [120] παρουσίασαν μια μέθοδο ταυτοποίησης παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen που βασίζεται στον αλγόριθμο Διαφορικής Εξέλιξης [97]. Ο αλγόριθμος παρουσιάζεται συνοπτικά στην §5.4.8. Οι εξισώσεις κίνησης και δύναμης επαναφοράς μετατράπηκαν σε μορφή state-space ως εξής:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= (f - c z_2 - z)/m \\ \dot{z} &= -a |z_2| |z| |z| - \beta z_2 z^2 + A z_2\end{aligned}\tag{5.5.12}$$

όπου:

- $z_1(t)$  η μετατόπιση,
- $z_2(t)$  η ταχύτητα,
- $z(t)$  η υστερητική δύναμη,
- $f(t)$  η δύναμη διέγερσης,
- $m$  η μάζα,
- $c$  ο γραμμικός συντελεστής ιξώδους απόσβεσης,
- $A, a, \beta$  παράμετροι του προσομοιώματος.

Με βάση την σχέση (5.5.12) είναι φανερό ότι η εκθετική παράμετρος θεωρείται γνωστή και ίση με 2. Συνεπώς, το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων δίνεται ως  $\underline{\mathbf{P}} = \{m \ c \ a \ \beta \ A\}^T$ . Σημειώνεται ότι, σε αυτή την περίπτωση, η παράμετρος  $a$  δεν είναι ο λόγος της μετελαστικής δυσκαμψίας προς την αρχική δυσκαμψία, ενώ ασυνήθης είναι και η ταυτοποίηση της μάζας του συστήματος.

Για τον περιορισμό των παραμέτρων μέσα σε κάποια επιτρεπτά όρια γίνεται χρήση κατάλληλων συναρτήσεων ποινής (penalty functions). Εξετάστηκαν προβλήματα ταυτοποίησης παραμέτρων με χρήση «καθαρών» δεδομένων καθώς και δεδομένων που περιέχουν θόρυβο. Στην περίπτωση πειραματικών δεδομένων, προτάθηκε η διενέργεια της ταυτοποίησης σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο χρησιμοποιείται μια διέγερση μικρής έντασης για να ταυτοποιηθούν κατά αδρό τρόπο οι παράμετροι που καθορίζουν την γραμμική απόκριση. Χρησιμοποιώντας ως αρχική λύση το αποτέλεσμα του πρώτου σταδίου, στο δεύτερο στάδιο χρησιμοποιείται μια διέγερση μεγάλης έντασης για να ταυτοποιηθούν οι παράμετροι που καθορίζουν την μη γραμμική απόκριση του προσομοιώματος.

#### **5.5.8 Zhang et al. (2002)**

Οι Zhang et al. [115] παρουσίασαν μια μελέτη σχετική με την ταυτοποίηση των παραμέτρων του «γενικευμένου προσομοιώματος διαφορικής υστέρησης» (generalized model of differential hysteresis) το οποίο παρουσιάζεται συνοπτικά στην §3.5. Το προσομοίωμα αυτό βασίζεται στο Bouc-Wen αλλά χρησιμοποιεί 13 παραμέτρους με τις οποίες μπορεί να λάβει υπόψη διάφορα φαινόμενα μείωσης της αντοχής, μείωσης της δυσκαμψίας και στένωσης. Σημειώνεται ότι, όπως και στο απλό προσομοίωμα Bouc-Wen, μία εκ των παραμέτρων είναι περιττή [112], κάτι το οποίο δεν είχε επισημανθεί την εποχή που παρουσιάστηκε το άρθρο [115].

Για την ταυτοποίηση των άγνωστων παραμέτρων χρησιμοποιήθηκαν τρεις μέθοδοι: η μέθοδος Simplex, η μέθοδος Generalized Reduced Gradient (GRG) και η μέθοδος EKF (§5.4.4). Για την μέθοδο EKF γίνεται χρήση μιας γενικής επαναληπτικής μεθόδου με συντελεστές βάρους καθώς και εσωτερικοί περιορισμοί. Σε κάθε περίπτωση, ως αντικειμενική συνάρτηση επιλέχθηκε το άθροισμα των τετραγώνων των λαθών της ιστορίας του  $\dot{z}$ , όπου  $z$  η υστερητική μετατόπιση. Οι μέθοδοι Simplex και GRG, εν αντιθέσει με την συγκεκριμένη μέθοδο EKF, δεν μπορούν να διαχειριστούν αποτελεσματικά δεδομένα που περιέχουν θόρυβο. Συνεπώς, απαιτείται μια προεπεξεργασία των δεδομένων με φίλτρα

απομάκρυνσης θορύβου. Τα χαρακτηριστικά των φίλτρων, και ιδιαίτερα η βέλτιστη διάσταση του «παραθύρου» ανάλυσης, δεν είναι γνωστά και θα πρέπει να προκύψουν από σχετική διερεύνηση. Η μέθοδος GRG αναφέρθηκε ως η λιγότερο σταθερή διότι παγιδεύεται εύκολα σε τοπικά βέλτιστα που μπορεί να είναι απέχουν πολύ από το ολικό βέλτιστο. Η μέθοδος Simplex είναι πιο σταθερή και λιγότερο ευαίσθητη στην αρχική εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων. Η μέθοδος EKF είναι σχετικά αργή αλλά είναι και η πλέον σταθερή όταν τα δεδομένα περιέχουν θόρυβο.

#### **5.5.9 Ha et al. (2005)**

Οι Ha et al. [121] (2005) χρησιμοποίησαν ένα τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc-Wen για την περιγραφή της απόκρισης πιεζοηλεκτρικών στοιχείων (piezoelectric element - PE). Για την ταυτοποίηση των παραμέτρων χρησιμοποιήθηκε μια προσαρμοζόμενη επαναληπτική μέθοδος που προτάθηκε από τους Chassiakos et al. [135]. Δυστυχώς, η μέθοδος δεν αναφέρθηκε ότι μπορεί να ταυτοποιήσει ταυτόχρονα την μάζα, την δυσκαμψία, τον συντελεστή ιξώδους απόσβεσης καθώς και τον πιεζοηλεκτρικό συντελεστή. Η ταυτοποίηση των εν λόγω παραμέτρων αυτών έχει ιδιαίτερη πρακτική σημασία [119].

#### **5.5.10 Ma et al. (2006)**

Οι Ma et al. [112] παρουσίασαν μια μελέτη σχετική με την ταυτοποίηση των παραμέτρων του «γενικευμένου προσομοιώματος διαφορικής υστέρησης» (§3.5). Η μέθοδος ταυτοποίησης βασίζεται στον αλγόριθμο DE (§5.4.8).

Αναφέρθηκαν προβλήματα κατά την ταυτοποίηση κάποιων παραμέτρων με μικρή ευαισθησία. Έτσι, πραγματοποιήθηκε μια ανάλυση ευαισθησίας από την οποία προέκυψαν τρεις παράμετροι (εκ των 12) ως οι λιγότερο ευαίσθητες. Στην συνέχεια, προτάθηκε η πραγματοποίηση της ταυτοποίησης κατά στάδια ώστε να επιτευχθεί βελτίωση της απόδοσης. Δεν εξετάστηκε η περίπτωση ταυτοποίησης με δεδομένα τα οποία περιέχουν θόρυβο. Σημειώνεται ο αλγόριθμος DE έχει αναφερθεί ότι δεν παρουσιάζει καλή απόδοση στην περίπτωση ύπαρξης θορύβου, π.χ. [105], [107].

Ως εφαρμογή, εκτελέστηκε μια σειρά πειραμάτων με ξύλινες συνδέσεις μορφής «T». Τα αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκαν αφ' ενός για την ταυτοποίηση των παραμέτρων του προσομοιώματος και αφ' ετέρου για την επικύρωσή του. Η επικύρωση επιτυγχάνεται με σύγκριση της προβλεπόμενης απόκρισης του ταυτοποιημένου συστήματος με αυτή των δοκιμών όταν αυτά υποβάλλονται σε διαφορετική φόρτιση από αυτή που χρησιμοποιήθηκε για την ταυτοποίηση. Αναφέρθηκε ότι, σε γενικές γραμμές, η πρόβλεψη είναι εφικτή αλλά η ακρίβειά της μειώνεται καθώς αυξάνονται οι βλάβες στην κατασκευή.

#### **5.5.11 Ha et al. (2006)**

Οι Ha et al. [119] ασχολήθηκαν με την ταυτοποίηση των παραμέτρων ενός προσομοιώματος Bouc-Wen που αναπαριστά την υστερητική απόκριση ενός πιεζοηλεκτρικού μηχανισμού κίνησης (piezoelectric actuator). Χρησιμοποίησαν μια παραλλαγή Γενετικών Αλγορίθμων με απ' ευθείας κωδικοποίηση πραγματικών μεταβλητών σχεδιασμού (Real-coded GA – RGA) και συνέκριναν την σχετική απόδοση του αλγορίθμου με χρήση διαφόρων αντικειμενικών συναρτήσεων. Αναφέρθηκαν ικανοποιητικά αποτελέσματα ταυτοποίησης αλλά προτάθηκε η χρήση αντικειμενικών συναρτήσεων που δεν περιέχουν παραγώγους υψηλού βαθμού.

#### **5.5.12 Charalampakis και Koumouis (2006)**

Οι Charalampakis και Koumouis [129] εφάρμοσαν τον Γενετικό Αλγόριθμο Sawtooth [123] για την ταυτοποίηση των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen. Η απόδοση της μεθόδου ήταν παρόμοια με αυτή του micro-GA (§5.4.7) και σε κάθε περίπτωση ανώτερη αυτής του Standard-GA (§5.4.6). Παρ' όλα αυτά, η μέθοδος αδυνατούσε να εντοπίσει τις πραγματικές τιμές του προσομοιώματος λόγω του σχετικά μεγάλου μήκους του χρωμοσώματος.

Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι στην περίπτωση που δεν εφαρμοστούν οι περιορισμοί των παραμέτρων του προσομοιώματος (§4.2.2), η ταυτοποίηση οδηγούσε σε σχεδόν βέλτιστες

λύσεις οι οποίες ήταν εντελώς διαφορετικές μεταξύ τους. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ένα σύστημα με μάζα  $m = 2.86$  υπό την σεισμική διέγερση του El Centro, τα πέντε καλύτερα αποτελέσματα που προέκυψαν από μια ανάλυση καθώς και οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων συνοψίζονται στον αντίστοιχο πίνακα (Πίνακας 5.5.1).

<i>Normalized MSE (%)</i>	$A$	$\beta$	$\gamma$	$n$	$a$	$F_y$ [kN]	$u_y$ [m]	$\frac{c}{m}$ [ $\frac{kNs}{m}$ ]
Πραγμ. τιμές	1.0000	0.1000	0.9000	2.0000	0.1000	2.8600	0.1110	5.1507
0.0076232	2.8652	0.0624	0.7792	2.1953	0.2363	1.8956	0.1788	5.2343
0.0076789	57.6596	0.3125	0.9844	1.9454	0.8105	1.9977	0.9020	5.1868
0.0093388	62.5375	0.3144	0.9658	2.0810	0.8613	2.7296	1.0000	5.2343
0.0964367	80.7077	0.0312	0.4189	2.1390	0.9276	2.8142	0.7404	5.1464
0.1252586	21.5689	0.0351	0.2578	2.2956	0.7480	1.4148	0.3397	5.2416

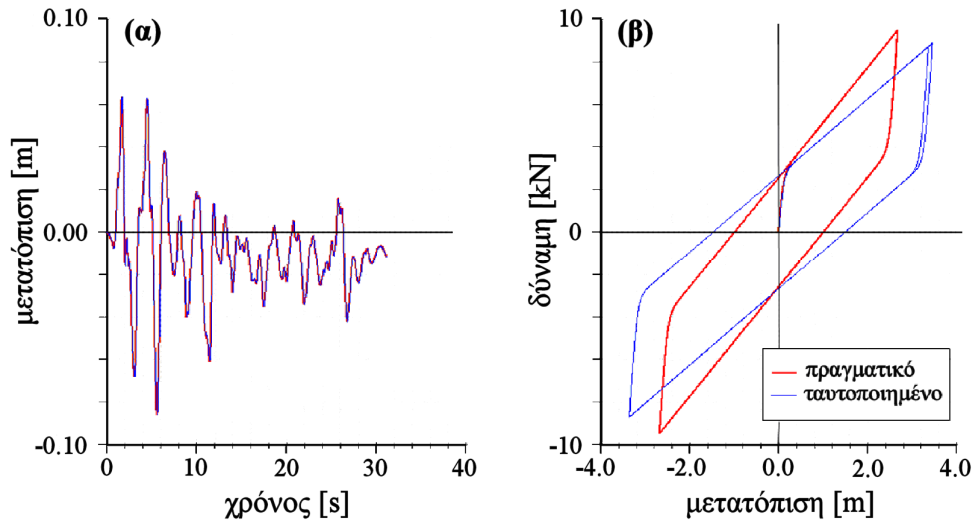
**Πίνακας 5.5.1: Παράμετροι προσομοιώματος χωρίς περιορισμούς (πραγματικές και ταυτοποιημένες τιμές)**

Με την εξαίρεση του συντελεστή  $c$  της εξίσωσης κίνησης, ο οποίος αφορά την ιξώδη απόσβεση και ταυτοποιήθηκε επιτυχώς σε όλες τις περιπτώσεις, παρατηρείται ότι βρέθηκαν εντελώς διαφορετικοί συνδυασμοί παραμέτρων οι οποίοι δίνουν φαινομενικά εξαιρετικά αποτελέσματα από άποψης ταυτοποίησης.

Δυστυχώς όμως, η επικύρωση του προσομοιώματος (model validation) αποδεικνύει ότι η ταυτοποίηση ήταν ανεπιτυχής. Για παράδειγμα, θεωρώντας το δεύτερο αποτέλεσμα της ταυτοποίησης (Πίνακας 5.5.1), η απόκριση του πραγματικού και του ταυτοποιημένου συστήματος πρακτικά συμπίπτουν για την σεισμική διέγερση του El Centro η οποία χρησιμοποιήθηκε για τις ανάγκες της ταυτοποίησης (Εικόνα 5.5.1α). Όμως η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται κατά τρεις τάξεις μεγέθους για την περίπτωση μιας απλής ημιτονοειδούς φόρτισης. Ο λόγος είναι ότι, στην δεύτερη περίπτωση, το σύστημα εισέρχεται έντονα στην μετελαστική περιοχή (Εικόνα 5.5.1β). Όμως, οι παράμετροι που ελέγχουν τον σκελετό του αντίστοιχου διγραμμικού προσομοιώματος, ήτοι οι παράμετροι



$F_y$ ,  $u_y$  και  $a$ , έχουν ταυτοποιηθεί λανθασμένα. Το παραπάνω παράδειγμα αναδεικνύει με τρόπο σαφή τους κινδύνους που ελλοχεύουν λόγω της αοριστίας των παραμέτρων του προσομοιώματος (§4.2.2).



Εικόνα 5.5.1: Απόκριση πραγματικού και ταυτοποιημένου συστήματος υπό (α) την σεισμική διέγερση του El Centro (β) απλή ημιτονοειδή φόρτιση με  $F_{\max}=10$  kN και  $T=25$  s

Normalized MSE (%)	$A$	$\beta$	$\gamma$	$n$	$a$	$F_y$ [kN]	$u_y$ [m]	$c$ $\left[ \frac{kNs}{m} \right]$
Πραγμ. τιμές	1.0000	0.1000	0.9000	2.0000	0.1000	2.8600	0.1110	5.1507
0.0000162	1.0000	0.0625	0.9375	2.0547	0.1094	2.8409	0.1108	5.1611
0.0000727	1.0000	0.1011	0.8989	2.1953	0.1289	2.6523	0.1030	5.1953
0.0001288	1.0000	0.0469	0.9531	2.1250	0.1406	2.6711	0.1039	5.1172
0.0001363	1.0000	0.2852	0.7148	2.0898	0.1162	2.5557	0.0981	5.1953
0.0001407	1.0000	0.2499	0.7501	2.1074	0.1250	2.5682	0.0990	5.1953

Πίνακας 5.5.2: Παράμετροι προσομοιώματος με περιορισμούς (πραγματικές και ταυτοποιημένες τιμές)

Μετά την εφαρμογή των περιορισμών  $A = \beta + \gamma = 1$ , όλα τα αποτελέσματα της διαδικασίας ταυτοποίησης συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές (Πίνακας 5.5.2). Η αδυναμία

εύρεσης των πραγματικών τιμών οφείλεται στην μέθοδο ταυτοποίησης, κάτι το οποίο αντιμετωπίστηκε επιτυχώς στα πλαίσια της παρούσας διατριβής.

### **5.5.13 Ye και Wang (2007)**

Οι Ye και Wang [122] παρουσίασαν μια μελέτη ταυτοποίησης ενός προσομοιώματος Bouc-Wen με χρήση του αλγόριθμου PSO (§5.4.9). Η εξίσωση κίνησης δίνεται ως:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + a\omega_n^2x + (1-a)\omega_n^2z = u \quad (5.5.13)$$

όπου:

- $x(t)$  η μετατόπιση,
- $u(t)$  η εξωτερική δύναμη,
- $\xi$  το ποσοστό ιξώδους απόσβεσης ( $0 \leq \xi \leq 1$ ),
- $\omega_n$  η ψευδο-φυσική περίοδος του συστήματος,
- $a$  ο λόγος δυσκαμψίας ( $0 \leq a \leq 1$ ),
- $z(t)$  η υστερητική μετατόπιση που ακολουθεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση με μηδενική αρχική συνθήκη:

$$\dot{z} = -\gamma|\dot{x}||z|^{n-1}z - \beta\dot{x}|z|^n + A\dot{x} \quad (5.5.14)$$

όπου:

- $A, \beta, \gamma, n$  παράμετροι του προσομοιώματος ( $n \geq 1$ ).

Η μελέτη αναφέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα ταυτοποίησης. Συγκρινόμενη με μια παραλλαγή Γενετικών Αλγορίθμων που χρησιμοποιεί πραγματικούς αριθμούς, η μέθοδος PSO αποδεικνύεται ανώτερη στην περίπτωση απουσίας θορύβου. Όταν τα δεδομένα περιέχουν θόρυβο, ο Γενετικός Αλγόριθμος παρουσιάζει καλύτερη αρχική απόδοση αλλά ο αλγόριθμος PSO καταλήγει σε πιο καλές τελικές λύσεις.

#### **5.5.14 Kwok et al. (2007)**

Οι Kwok et al. [118] χρησιμοποίησαν ένα ασύμμετρο προσομοίωμα Bouc-Wen για την περιγραφή της απόκρισης μαγνητορεολογικών αποσβεστήρων (magnetorheological fluid dampers – MR dampers). Για την ταυτοποίηση των παραμέτρων χρησιμοποίησαν Γενετικούς Αλγορίθμους (§5.4.6) στους οποίους οι τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης προσαρμόζονται αυτόματα με βάση την ποιότητα των λύσεων που περιέχονται στον πληθυσμό. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκε ένα στατιστικό κριτήριο τερματισμού το οποίο βασίζεται στην παρατηρούμενη μείωση της απόδοσης του αλγόριθμου. Αναφέρθηκαν ικανοποιητικά αποτελέσματα ταυτοποίησης με βάση πειραματικά δεδομένα.

### **5.6 Μειονεκτήματα υφιστάμενων μεθόδων**

Από την επισκόπηση του υφιστάμενου ερευνητικού έργου είναι φανερό ότι απουσιάζει μια μέθοδος η οποία να συνδυάζει καλή απόδοση και σταθερότητα. Στις περισσότερες μεθόδους υπάρχει έντονο το ενδεχόμενο του εγκλωβισμού του αλγορίθμου σε υπο-βέλτιστες λύσεις (sub-optimal solutions), το οποίο συνήθως οφείλεται σε λανθασμένη επιλογή των αρχικών συνθηκών. Οι δυσκολίες ταυτοποίησης εντοπίζονται κυρίως στην εκθετική παράμετρο  $n$  του προσομοιώματος. Αυτές είτε αντιμετωπίζονται με έντονο πειραματισμό με διαφορετικές αρχικές συνθήκες, είτε αποφεύγονται εντελώς με την θεώρηση ότι η εκθετική παράμετρος είναι εκ των προτέρων γνωστή, π.χ. [120], [111], [117]. Επιπλέον, σε πολλές μεθόδους προτείνεται η ταυτοποίηση ανά στάδια, π.χ. [116], [112]. Στο πρώτο στάδιο πραγματοποιείται παγίωση κάποιων άγνωστων παραμέτρων σε «συνήθεις» τιμές και ταυτοποιούνται κατά αδρό τρόπο οι υπόλοιπες παράμετροι. Στο επόμενο στάδιο ενεργοποιούνται όλες οι άγνωστες παράμετροι. Η ταυτοποίηση ανά στάδια γενικά βελτιώνει την απόδοση αλλά ταυτόχρονα καθορίζει, σε μικρό ή μεγάλο βαθμό, το τελικό αποτέλεσμα.

Επιπλέον, κοινό χαρακτηριστικό όλων των προσεγγίσεων είναι ότι εστιάζουν στην μέθοδο ταυτοποίησης και πρακτικά αγνοούν τα παρατηρούμενα δεδομένα. Υπάρχει ομοφωνία στο ότι τα δεδομένα αυτά θα πρέπει να περιλαμβάνουν, σε ποιοτικό επίπεδο, όλα τα

χαρακτηριστικά του προσομοιώματος που πρόκειται να ταυτοποιηθούν. Παρ' όλα αυτά, δεν έχει πραγματοποιηθεί κάποια συστηματική έρευνα πάνω στο θέμα. Έτσι, το φυσικό σύστημα υποβάλλεται σε μια αρμονική ή σεισμική διέγερση με κάποια χαρακτηριστικά, και θεωρείται, χωρίς εξέταση, ότι τα παρατηρούμενα δεδομένα περιέχουν όλη την απαραίτητη πληροφορία για τις ανάγκες της ταυτοποίησης. Όπως θα δειχθεί όμως, η πληροφορία που περιέχεται στα παρατηρούμενα δεδομένα αποτελεί καθοριστικό παράγοντα όχι μόνο για την απόδοση αλλά ακόμη και για την επιτυχία της (οποιασδήποτε) μεθόδου ταυτοποίησης.

Τέλος, σημειώνεται ότι σημαντικό πρόβλημα για την διαδικασία ταυτοποίησης αποτελεί η μεγάλη διαφοροποίηση στην ευαισθησία των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen. Η σχετική ευαισθησία εξαρτάται, πέραν από την ίδια την μαθηματική διατύπωση του προσομοιώματος και από την διέγερση η οποία χρησιμοποιείται. Για παράδειγμα, για μια ισχυρή διέγερση η οποία οδηγεί το σύστημα έντονα μέσα στην μετελαστική περιοχή, η σχετική ευαισθησία των παραμέτρων που καθορίζουν τον σκελετό του αντίστοιχου διγραμμικού προσομοιώματος είναι μεγάλη. Έτσι, πολλές μέθοδοι αδυνατούν να ταυτοποιήσουν τις λιγότερο ευαίσθητες παραμέτρους, όπως τυπικά είναι οι παράμετροι  $\beta$  και  $\gamma$ .

## **5.7 Προτεινόμενη νέα μέθοδος**

### **5.7.1 Αντικειμενική συνάρτηση - Ορισμός προβλήματος βελτιστοποίησης**

Η προτεινόμενη μέθοδος ταυτοποίησης παραμέτρων χρησιμοποιεί ως αντικειμενική συνάρτηση το *Κανονικοποιημένο Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα* (Normalized Mean Square Error – MSE) της προβλεπόμενης ιστορίας  $\hat{y}(t | \mathbf{p})$  σε σχέση με την παρατηρούμενη ιστορία  $y(t)$ . Θεωρώντας ότι η παρατήρηση του φαινομένου γίνεται σε διακριτές χρονικές στιγμές, η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως:

$$OF(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{i=1}^N (y(t_i) - \hat{y}(t_i | \mathbf{p}))^2}{N \sigma_y^2} \quad (5.7.1)$$

όπου:

- $\mathbf{p}$  το διάνυσμα των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen,
- $\sigma_y^2$  η διασπορά της παρατηρούμενης χρονοϊστορίας,
- $N$  το πλήθος των χρονικών στιγμών παρατήρησης.

Χρησιμοποιείται η χρονοϊστορία της μετατόπισης και της εφαρμοζόμενης εξωτερικής δύναμης για πειράματα ελεγχόμενα με την δύναμη (force-controlled) και την μετατόπιση (displacement-controlled), αντίστοιχα.

### 5.7.2 Ορισμός προβλήματος βελτιστοποίησης

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να οριστεί ως η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης όταν το διάνυσμα των παραμέτρων υπόκειται στους παρακάτω πλευρικούς περιορισμούς:

$$\mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{\max} \quad (5.7.2)$$

όπου,  $\mathbf{p}_{\min}$  και  $\mathbf{p}_{\max}$  είναι διανύσματα τα οποία καθορίζουν τα κατώτερα και τα ανώτερα επιτρεπτά όρια τιμών των παραμέτρων, αντίστοιχα.

### 5.7.3 Επίλυση εξισώσεων

Η μαθηματική διατύπωση του μονοβάθμιου προσομοιώματος Bouc-Wen παρουσιάστηκε στην §4.2.1. Η εξίσωση κίνησης ενός μονοβάθμιου συστήματος με γραμμική ιξώδη απόσβεση δίνεται από την σχέση:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + F(t) = f(t) \quad (5.7.3)$$

όπου:

- $u(t)$  η μετατόπιση,
- $m$  η ταλαντούμενη μάζα, με μονάδες δύναμη προς επιτάχυνση,

- ο  $c$  ο γραμμικός συντελεστής ιξώδους απόσβεσης, με μονάδες δύναμη προς ταχύτητα,
- $f(t)$  η δύναμη διέγερσης,
- $F(t)$  η δύναμη επαναφοράς, η οποία δίνεται από την σχέση (4.2.1),
- $(\dot{\cdot})$  ο τελεστής παραγώγισης ως προς το χρόνο.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.2.1) στην (5.7.3) προκύπτει η σχέση:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + a \frac{F_y}{u_y} u(t) + (1-a) F_y z(t) = f(t) \quad (5.7.4)$$

Οι σχέσεις (5.7.4) και (4.2.2) μετατρέπονται σε μορφή state-space ως εξής:

$$\begin{cases} x_1(t) = u(t) \\ x_2(t) = \dot{u}(t) \\ x_3(t) = z(t) \end{cases} \quad (5.7.5)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{cases} = \begin{cases} x_2(t) \\ -\frac{1}{m} \left[ c x_2(t) + a \frac{F_y}{u_y} x_1(t) + (1-a) F_y x_3(t) - f(t) \right] \\ \frac{1}{u_y} \left[ \left( A - |x_3(t)|^n (\gamma \operatorname{sign}(x_2(t) x_3(t)) + \beta) \right) x_2(t) \right] \end{cases} \quad (5.7.6)$$

Το παραπάνω σύστημα τριών μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων μπορεί να επιλυθεί με τον Livermore stiff ODE integrator [109], ή με την μέθοδο Runge-Kutta 4<sup>ης</sup> – 5<sup>ης</sup> τάξης [65]. Η πρώτη μέθοδος είναι πιο ακριβής και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αριθμητικό έλεγχο, ενώ η δεύτερη είναι πιο γρήγορη και συνεπώς καταλληλότερη για στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης.

Σημειώνεται ότι οι περιορισμοί  $A = \beta + \gamma = 1$  αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχία της διαδικασίας ταυτοποίησης, όπως αναλύθηκε στις §4.2.2 και §5.5.12. Συνεπώς, στο παρόν κεφάλαιο θεωρείται ότι ισχύουν χωρίς περαιτέρω αναφορά.

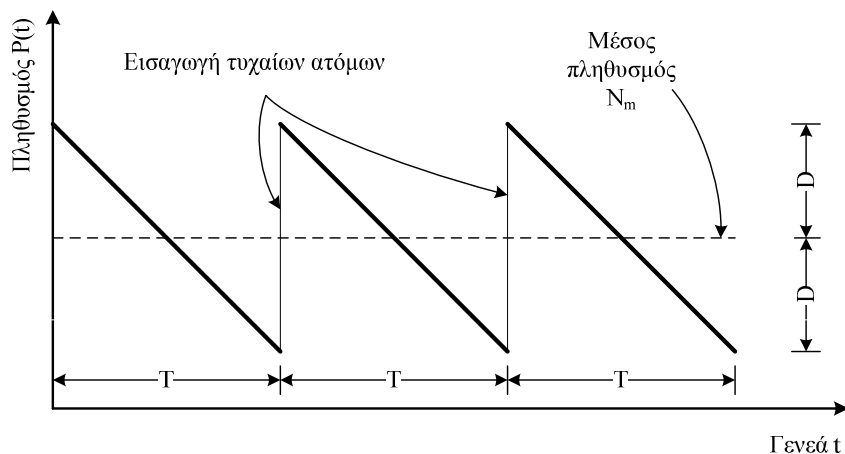
#### 5.7.4 Εξελικτικός αλγόριθμος

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms – EAs), είναι αλγόριθμοι εμπνευσμένοι από την φυσική επιλογή και την βιολογική εξέλιξη των ειδών. Οι αλγόριθμοι αυτοί χρησιμοποιούνται σε προβλήματα βελτιστοποίησης με μεγάλη επιτυχία. Στην περίπτωση συνεχών αντικειμενικών συναρτήσεων με πραγματικές μεταβλητές σχεδιασμού πολλοί ερευνητές προτιμούν εξελικτικούς αλγορίθμους πραγματικών μεταβλητών, όπως ο αλγόριθμος DE (§5.4.8) ή ο αλγόριθμος PSO (§5.4.9). Παρ' όλα αυτά, μελέτες υποδεικνύουν ότι τόσο ο αλγόριθμος DE όσο και ο αλγόριθμος PSO έχουν υποδεέστερη απόδοση σε σχέση με έναν σχετικά απλό Γενετικό Αλγόριθμο σε περίπτωση που τα δεδομένα περιέχουν θόρυβο [105], [107]. Είναι όμως σαφές ότι στην περίπτωση πειραματικών δεδομένων, η ύπαρξη κάποιου επιπέδου θορύβου πρέπει να θεωρείται δεδομένη. Επιπλέον, οι απλοί Γενετικοί Αλγόριθμοι με δυαδική κωδικοποίηση μπορούν να ενσωματώσουν πολύ εύκολα έναν αλγόριθμο τοπικής βελτιστοποίησης (local optimizer). Αυτού του τύπου οι υβριδικοί εξελικτικοί αλγόριθμοι (Hybrid EAs) λέγεται ότι ανήκουν στην κλάση των Μιμητικών Αλγορίθμων (Memetic Algorithms) [142] και παρουσιάζουν βελτιωμένη απόδοση σε σχέση με κάθε ένα από τα συστατικά τους μέρη για ένα μεγάλο εύρος πρακτικών εφαρμογών [91]. Ο λόγος είναι ότι χρησιμοποιούν εξειδικευμένη πληροφορία, σχετική με το συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζεται, ούτως ώστε να παρακάμψουν το λεγόμενο No Free Lunch Theorem [143] σύμφωνα με το οποίο η μέση απόδοση όλων των αλγορίθμων με βάση τον χώρο όλων των δυνατών προβλημάτων είναι ίδια.

Συνεπώς, ο υβριδικός εξελικτικός αλγόριθμος της προτεινόμενης μεθόδου αποτελείται από τα εξής μέρη:

- Τον Γενετικό Αλγόριθμο SawTooth ο οποίος παρουσιάστηκε πρόσφατα [123],
- Τον αλγόριθμο τοπικής βελτιστοποίησης Greedy Ascent Hill Climbing (GAHC) ο οποίος εφαρμόζεται μέχρι την εύρεση του τοπικού βέλτιστου [91].

Ο SawTooth-GA χρησιμοποιεί μεταβαλλόμενο μέγεθος πληθυσμού και περιοδική μερική αρχικοποίηση του πληθυσμού για να επιτύχει αύξηση της απόδοσης. Παρουσιάζει καλή απόδοση συγκρινόμενη με τον Standard-GA (§5.4.6) αλλά και άλλους αλγορίθμους που χρησιμοποιούν μερική αρχικοποίηση του πληθυσμού, όπως ο Micro-GA (§5.4.7). Σύμφωνα με τον SawTooth-GA, το μέγεθος του πληθυσμού ακολουθεί ένα προκαθορισμένο σχέδιο μεταβολής (Εικόνα 5.7.1) το οποίο χαρακτηρίζεται από μέσο πληθυσμό  $N_m$ , ημιέυρος μεταβολής πληθυσμού  $D < N_m$  και περίοδο μεταβολής  $T$ . Με βάση τα συμπεράσματα μιας σειράς παραμετρικών μελετών με πλήθος προβλημάτων τόσο μοναδικού βέλτιστου (unimodal problems) όσο και πολλαπλών τοπικών και ολικών βέλτιστων (multimodal problems), έγινε φανερό ότι η έντονη αρχικοποίηση του πληθυσμού, δηλαδή μεγάλες τιμές του λόγου  $D/N_m < 1$ , ευνοεί την απόδοση του αλγορίθμου.



**Εικόνα 5.7.1: Εξέλιξη πληθυσμού Γενετικού Αλγορίθμου SawTooth**

Για τις αναλύσεις επιλέχθηκε γενετική διασταύρωση ενός σημείου (single-point crossover) με πιθανότητα 0.7. Χρησιμοποιούνται δύο τελεστές μετάλλαξης, ήτοι ο απλός τελεστής μετάλλαξης (jump mutation) με πιθανότητα  $1/P$  και ο τελεστής έρπουσας μετάλλαξης (creep mutation) με πιθανότητα  $L_c/N_p/P$ , όπου:

- ο  $P$  είναι το τρέχον μέγεθος του πληθυσμού,



- $L_c$  είναι το μήκος του χρωμοσώματος σε δυφία,
- $N_p$  είναι το πλήθος των άγνωστων παραμέτρων προς ταυτοποίηση.

Μετά την έλευση συγκεκριμένου πλήθους γενεών, η καλύτερη λύση που προκύπτει από τον αλγόριθμο SawTooth γίνεται αρχική λύση (seed) για τον αλγόριθμο τοπικής βελτιστοποίησης GAHC. Η αρχική λύση βελτιώνεται συνεχώς με εναλλαγή καθενός εκ των δυφίων του χρωμοσώματος από 0 σε 1 και αντίστροφα. Η εναλλαγή γίνεται ατέρμονα με κατεύθυνση από αριστερά προς τα δεξιά και η καλύτερη λύση διατηρείται ως βάση για το επόμενο βήμα. Όταν ολοκληρώνεται ένας πλήρης κύκλος εναλλαγών χωρίς βελτίωση, τότε το τοπικό βέλτιστο έχει βρεθεί [91].

### 5.7.5 Συρρίκνωση του χώρου των λύσεων (Bounding)

Για την βελτίωση της απόδοσης, η προτεινόμενη μέθοδος περιλαμβάνει έναν μηχανισμό συρρίκνωσης του χώρου των λύσεων ο οποίος βασίζεται σε στατιστική ανάλυση δειγμάτων από τοπικά βέλτιστα. Η συρρίκνωση του χώρου των λύσεων έχει αναφερθεί ότι βελτιώνει σημαντικά την απόδοση αλλά και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων [138].

Θεωρούμε ότι η μεταβλητή  $i=1..N_p$  αφορά τις άγνωστες παραμέτρους προς ταυτοποίηση. Σε κάθε βήμα βελτιστοποίησης  $j$ , ο υβριδικός εξελικτικός αλγόριθμος εφαρμόζεται για  $M_r$  ανεξάρτητες φορές ενώ κάθε ανάλυση εξελίσσεται για λίγες μόνον γενεές. Οι αναλύσεις αυτές μπορούν να πραγματοποιηθούν παράλληλα σε ένα δίκτυο Η/Υ, με αποτέλεσμα την δραστική μείωση του υπολογιστικού χρόνου. Οι λύσεις ταξινομούνται με βάση την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και οι χειρότερες  $M_t$  απορρίπτονται. Στις υπόλοιπες  $M = M_r - M_t$  λύσεις προσαρτώνται συντελεστές βάρους ως εξής:

$$w_k = \frac{\max_k(OF_k)}{OF_k} \quad (5.7.7)$$

όπου,

- $k = 1..M$  μεταβλητή που αφορά τις λύσεις που απομένουν,

- $w_k$  το βάρος της λύσης  $k$ ,
- $OF_k$  η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της λύσης  $k$ .

Σύμφωνα με την σχέση (5.7.7), η χειρότερη λύση λαμβάνει τιμή βάρους ίση με την μονάδα. Η σταθμισμένη μέση τιμή  $m_i$  της παραμέτρου  $i$  υπολογίζεται από την σχέση:

$$m_i = \frac{\sum_{k=1}^M (w_k p_{ik})}{\sum_{k=1}^M (w_k)} \quad (5.7.8)$$

όπου,  $p_{ik}$  η τιμή της παραμέτρου  $i$  της λύσης  $k$ . Η σταθμισμένη τυπική απόκλιση  $s_i$  της παραμέτρου  $i$  υπολογίζεται από την σχέση:

$$s_i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^M (w_k (p_{ik} - m_i)^2)}{\sum_{k=1}^M (w_k)}} \quad (5.7.9)$$

Οι δοκιμαστικοί πλευρικοί περιορισμοί της παραμέτρου  $i$  στο επόμενο βήμα  $j+1$  υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j+1} &= m_i + q s_i \\ \bar{l}_{i,j+1} &= m_i - q s_i \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

όπου  $q$  ένας συντελεστής που αναπαριστά το ήμισυ του εύρους της παραμέτρου σε όρους σταθμισμένων τυπικών αποκλίσεων. Τελικά, οι πλευρικοί περιορισμοί της παραμέτρου  $i$  στο επόμενο βήμα  $j+1$  προκύπτουν ως εξής:

$$[l_{i,j+1}, u_{i,j+1}] = [l_{ij}, u_{ij}] \cap [\bar{l}_{i,j+1}, \bar{u}_{i,j+1}] \quad (5.7.11)$$

Σημειώνεται ότι, με βάση την σχέση (5.7.11), ο χώρος των λύσεων δεν επιτρέπεται να μεγεθυνθεί. Αν μια συγκεκριμένη παράμετρος έχει μικρή ευαισθησία, τότε τα αποτελέσματα των αναλύσεων θα είναι διασκορπισμένα σχεδόν ομοιόμορφα στο επιτρεπόμενο διάστημα τιμών της. Εφόσον το μέγεθος του στατιστικού δείγματος είναι επαρκές, η σταθμισμένη

τυπική απόκλιση θα είναι σημαντική και έτσι το διάστημα των επιτρεπτών τιμών της παραμέτρου θα παραμείνει αμετάβλητο. Έτσι, η προτεινόμενη μέθοδος *αντί να εγκλωβίζεται σε τοπικά βέλτιστα, αναστέλλει την συρρίκνωση του χώρου των λύσεων ανά παράμετρο όταν η στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων δεν δικαιολογεί πρόοδο*. Με αυτόν τον τρόπο αναδεικνύεται ένα μέτρο σχετικής ευαισθησίας των παραμέτρων, η οποία εξαρτάται, μεταξύ άλλων, και από το πείραμα με το οποίο γίνεται η ταυτοποίηση.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό της προτεινόμενης μεθόδου είναι ότι είναι ασφαλής όταν η βέλτιστη τιμή μιας παραμέτρου κείται κοντά στο ένα άκρο του διαστήματος των επιτρεπτών τιμών. Ο λόγος είναι ότι, γενικά, η σταθμισμένη μέση τιμή θα κείται κοντά στο ίδιο άκρο. Εφόσον το νέο εύρος τιμών ορίζεται συμμετρικά και εκατέρωθεν της σταθμισμένης μέσης τιμής, η βέλτιστη τιμή παραμένει εντός του χώρου των λύσεων.

#### 5.7.6 Έλεγχος των συντελεστών της μεθόδου ταυτοποίησης

Για την βελτίωση της απόδοσης, κρίθηκε απαραίτητη η εισαγωγή ενός μηχανισμού ελέγχου των συντελεστών της προτεινόμενης μεθόδου ταυτοποίησης ο οποίος βασίζεται στην πρόοδο της διαδικασίας. Στο εξής, για λόγους αποφυγής σύγχυσης, θα χρησιμοποιείται ο όρος «συντελεστής» αναφορικά με τους συντελεστές της μεθόδου ταυτοποίησης και ο όρος «παράμετρος» αναφορικά με τις παραμέτρους του προσομοιώματος Bouc-Wen προς ταυτοποίηση.

Εισάγεται η έννοια του *λόγου εύρους* ως δείκτη προόδου της ταυτοποίησης μιας παραμέτρου. Αναφορικά με την παράμετρο  $i$ , ο λόγος εύρους στο βήμα βελτιστοποίησης  $j$  δίνεται από την σχέση:

$$a_{ij} = \frac{u_{ij} - l_{ij}}{U_i - L_i} \quad (5.7.12)$$

όπου,

- $u_{ij}, l_{ij}$  είναι το άνω και κάτω όριο του εύρους τιμών στο βήμα  $j$ , αντίστοιχα,

- $U_i, L_i$  είναι το αρχικό άνω και κάτω όριο του εύρους τιμών, αντίστοιχα.

Ο λόγος εύρους είναι θετικός αριθμός, έχει αρχική τιμή ίση με την μονάδα και μειώνεται καθώς συρρικνώνεται το διάστημα των επιτρεπτών τιμών της συγκεκριμένης παραμέτρου. Ως *συνολικό λόγο εύρους* στο βήμα  $j$  ορίζουμε τον μέγιστο λόγο εύρους όλων των παραμέτρων:

$$a_j = \max_i \{a_{ij}\} \quad (5.7.13)$$

Συνεπώς, με βάση την σχέση (5.7.13), ο έλεγχος των συντελεστών γίνεται με βάση την παράμετρο που έχει παρουσιάσει την μικρότερη πρόοδο ταυτοποίησης.

Η μεταβολή των τιμών των συντελεστών γίνεται μεταξύ μιας αρχικής και μιας τελικής τιμής. Στην περίπτωση συντελεστών που είναι πραγματικοί αριθμοί, η τιμή τους δίνεται από την σχέση:

$$r = \begin{cases} r_e + (r_s - r_e) \left( \frac{a_j - a_{r1}}{1 - a_{r1}} \right), & 1 > a_r \geq a_{r1} \\ r_e, & a_{r1} > a_j \end{cases} \quad (5.7.14)$$

όπου,

- $r_s, r_e$  είναι η αρχική και η τελική τιμή, αντίστοιχα, του συντελεστή,
- $a_{r1}$  μια σταθερά με τυπική τιμή  $1.0 \times 10^{-3}$ , η οποία αναπαριστά τον συνολικό λόγο εύρους για τον οποίο η ταυτοποίηση έχει πρακτικά ολοκληρωθεί.

Στην περίπτωση συντελεστών που είναι ακέραιοι αριθμοί, η τιμή τους δίνεται από την σχέση:

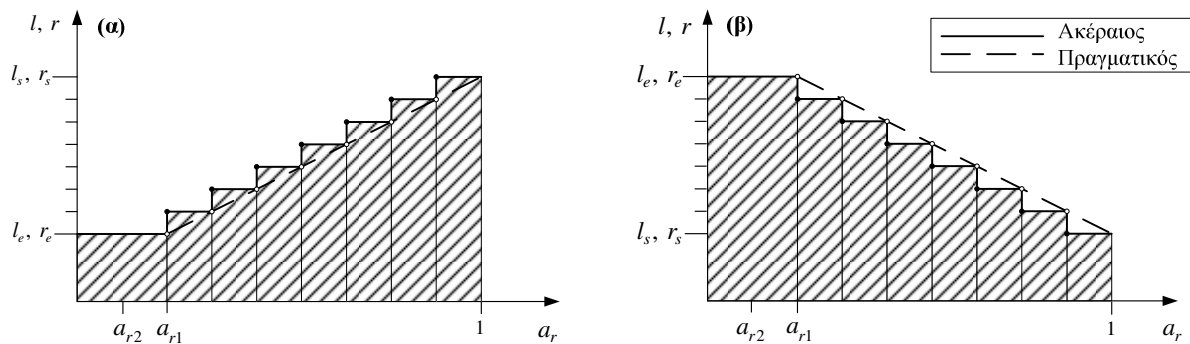
$$l = \begin{cases} l_s, & a_j = 1 \\ l_e + \text{int} \left( (l_s - l_e) \left( \frac{a_j - a_{r1}}{1 - a_{r1}} \right) \right) + l_c, & 1 > a_j \geq a_{r1} \\ l_e, & a_j < a_{r1} \end{cases} \quad (5.7.15)$$

όπου,

- $l_s, l_e$  είναι η αρχική και η τελική τιμή, αντίστοιχα, του συντελεστή,
- $\text{int}(\cdot)$  η συνάρτηση που επιστρέφει το ακέραιο μέρος ενός αριθμού,
- $l_c$  μια σταθερά που εξαρτάται από το αν ο συντελεστής αυξάνεται ή μειώνεται και δίνεται από την σχέση:

$$l_c = \begin{cases} 1, & l_e < l_s \\ -1, & l_e > l_s \\ 0, & l_e = l_s \end{cases} \quad (5.7.16)$$

Με βάση τα παραπάνω, η μεταβολή των συντελεστών της προτεινόμενης μεθόδου ταυτοποίησης παίρνει την μορφή που φαίνεται στην Εικόνα 5.7.2.



Εικόνα 5.7.2: Έλεγχος (α) φθίνοντα (β) αύξοντα συντελεστή εξελικτικού αλγορίθμου

### 5.7.7 Συνθήκη τερματισμού

Ο συνολικός λόγος εύρους  $a_j$  που παρουσιάστηκε στην §5.7.6 μπορεί να αποτελέσει μια ιδιαίτερα πρακτική συνθήκη τερματισμού της διαδικασίας ταυτοποίησης. Στην προτεινόμενη μέθοδο, η συνθήκη τερματισμού είναι να φτάσει ο συνολικός λόγος εύρους  $a_j$  την τιμή  $a_{r2} = 1.0 \times 10^{-4}$ . Έτσι, όταν ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού, το διάστημα των επιτρεπτών τιμών όλων των παραμέτρων είναι το πολύ ίσο με το ένα δεκάκις χιλιοστό του

αντίστοιχου αρχικού διαστήματος. Με άλλα λόγια, το άνω και κάτω όριο των επιτρεπτών τιμών όλων των παραμέτρων πρακτικά ταυτίζεται.

Το πλεονέκτημα αυτής της συνθήκης τερματισμού είναι ότι ορίζεται σε «μακροσκοπικούς» όρους τιμών παραμέτρων και έτσι είναι *ανεξάρτητη* από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του πειράματος που χρησιμοποιείται. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνθήκη τερματισμού κάποια τιμή κατωφλίου της αντικειμενικής συνάρτησης, κάτω από την οποία θεωρείται ότι η ταυτοποίηση είναι επαρκής. Σε αυτήν την περίπτωση όμως, θα πρέπει κάθε φορά να γίνεται διερεύνηση για τον καθορισμό της κατάλληλης τιμής κατωφλίου.

## **5.8 Ταυτοποίηση παραμέτρων**

### **5.8.1 Γενικά**

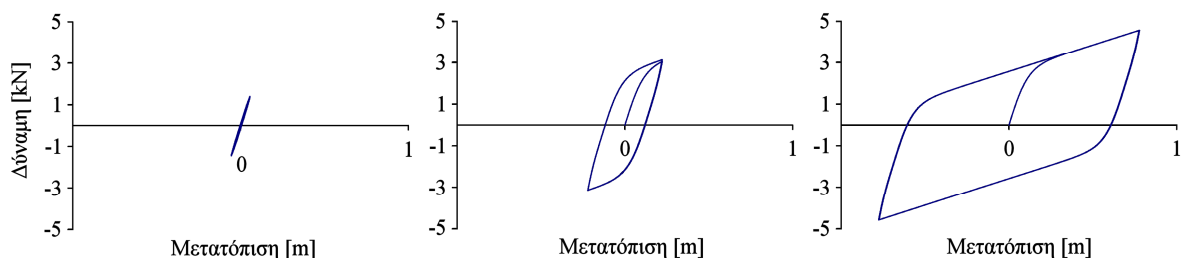
Η απόδοση *οποιασδήποτε* μεθόδου ταυτοποίησης παραμέτρων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την πληροφορία που υπάρχει στα δεδομένα εισόδου – εξόδου. Αυτά πρέπει να περιλαμβάνουν όλα τα χαρακτηριστικά που πρόκειται να ταυτοποιηθούν. Στην συνέχεια διερευνάται η σχετική απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου σε συνάρτηση με την πληροφορία που περιέχεται στα δεδομένα καθώς και την ενδεχόμενη παρουσία ιξώδους απόσβεσης.

### **5.8.2 Σύστημα χωρίς ιξώδη απόσβεση**

Παρατηρήθηκε ότι η ταυτοποίηση ενός συστήματος χωρίς ιξώδη απόσβεση μπορεί να επιτευχθεί με ένα μόνο πείραμα αρμονικής διέγερσης και λίγους κύκλους φόρτισης. Σε αυτήν την περίπτωση, η ιξώδης απόσβεση είτε αγνοείται είτε θεωρείται ότι είναι γνωστή.

Αναλύθηκαν τρεις περιπτώσεις πειραμάτων ελεγχόμενων με την μετατόπιση (displacement-controlled), ήτοι 1α ως 1γ, με μέγιστη μετατόπιση ίση με 0.5, 2.0 και 7.0 φορές την «παραμόρφωση διαρροής»  $u_y$ , αντίστοιχα (Εικόνα 5.8.1). Σε κάθε περίπτωση, πραγματοποιήθηκαν τρεις πλήρεις κύκλοι φόρτισης. Επιπλέον αυτών, αναλύθηκε ως

περίπτωση 1δ η απόκριση του αγνώστου συστήματος υπό την σεισμική διέγερση του El Centro [126]. Η ταλαντούμενη μάζα είναι ίση με  $28.6kNs^2/m$  ενώ η μέγιστη εδαφική επιτάχυνση (Peak Ground Acceleration – PGA) είναι ίση με  $0.319g$ , με αποτέλεσμα η παρατηρούμενη μέγιστη μετατόπιση να είναι περίπου ίση με  $2u_y$ .



**Εικόνα 5.8.1: Πειράματα επιβαλλόμενης αρμονικής μετατόπισης**

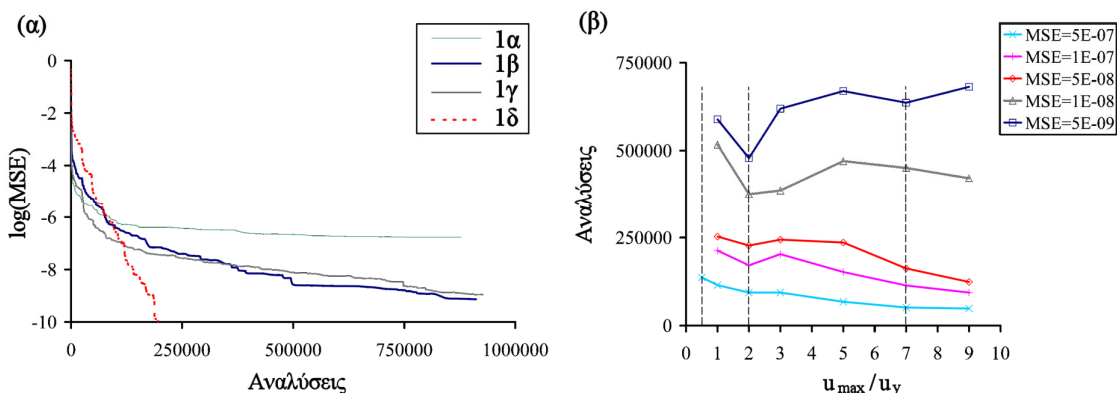
Ο Πίνακας 5.8.1 παρουσιάζει τις πραγματικές τιμές, τους αρχικούς πλευρικούς περιορισμούς και τις ταυτοποιημένες τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Τα αποτελέσματα αυτά είναι οι μέσες τιμές από 10 ανεξάρτητες αναλύσεις. Επιπλέον, η Εικόνα 5.8.2 δείχνει την σχετική απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου για τις τέσσερις περιπτώσεις πειραμάτων 1α – 1δ.

	$\gamma$	$n$	$a$	$F_y$ [kN]	$u_y$ [m]	$c$ [kNs/m]
Πραγματικές τιμές	0.9000	2.0000	0.1000	2.8600	0.1110	0.0000
Αρχικό κάτω όριο	0.0000	1.0000	0.0000	0.1000	0.0100	-
Αρχικό άνω όριο	1.0000	10.0000	1.0000	10.0000	1.0000	-
1α ( $u_{\max} = 0.5 u_y$ )	0.8856	1.9562	0.1075	2.8987	0.1123	-
1β ( $u_{\max} = 2.0 u_y$ )	0.8991	1.9986	0.1000	2.8597	0.1110	-
1γ ( $u_{\max} = 7.0 u_y$ )	0.8676	1.9220	0.0987	2.8552	0.1093	-
1δ (El Centro)	0.9000	2.0000	0.1000	2.8600	0.1110	-

**Πίνακας 5.8.1: Πραγματικές και ταυτοποιημένες τιμές παραμέτρων χωρίς ιξώδη απόσβεση**

Οι συντελεστές της προτεινόμενης μεθόδου με τους οποίους πραγματοποιήθηκαν οι αναλύσεις είναι οι εξής:

- Πλήθος ανεξάρτητων αναλύσεων  $M_r = 40$ ,
- Πλήθος λύσεων που απορρίπτονται  $M_l = 10$ ,
- Συντελεστής τυπικής απόκλισης  $q = 3.0$ ,
- Μέσο μέγεθος πληθυσμού SawTooth-GA  $N_m = 25$ ,
- Ημιεύρος μεταβολής πληθυσμού SawTooth-GA  $D = 20$ ,
- Περίοδος μεταβολής πληθυσμού SawTooth-GA  $T = 5$  γενεές,
- Διάρκεια εφαρμογής SawTooth-GA  $K_T = 3$  περίοδοι, ήτοι  $3 \times 5 = 15$  γενεές,
- Μήκος γονιδίου  $L_g = 10$  δυφία,
- Πλήθος άγνωστων παραμέτρων  $N_p = 5$ ,
- Συνολικό μήκος χρωμοσώματος  $L_c = 5 \times 10 = 50$  δυφία.



**Εικόνα 5.8.2: Σχετική απόδοση προτεινόμενης μεθόδου χωρίς ιξώδη απόσβεση**

Στην περίπτωση του πειράματος με την σεισμική διέγερση (περίπτωση 1δ), η ταυτοποίηση των παραμέτρων ήταν «ακριβής», ήτοι επιτεύχθηκε ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. Όσον αφορά τα ημιτονοειδή πειράματα, η απόκριση της πρώτης περίπτωσης (περίπτωση 1α) είναι σχεδόν γραμμική και συνεπώς δεν περιέχει πληροφορία για



την μετελαστική περιοχή του συστήματος. Ως αποτέλεσμα, η διαδικασία ταυτοποίησης αποτυγχάνει να προχωρήσει πέρα από κάποιο σημείο (Εικόνα 5.8.2α). Στην περίπτωση 1γ, η απόκριση είναι έντονα μη γραμμική και παρατηρείται η καλύτερη αρχική απόδοση στην ταυτοποίηση. Αυτό οφείλεται στο ότι το μεγαλύτερο μέρος της πληροφορίας αφορά την μετελαστική περιοχή. Ως συνέπεια, οι παράμετροι οι οποίες καθορίζουν τον αντίστοιχο διγραμμικό σκελετό της απόκρισης, ήτοι οι παράμετροι  $u_y$ ,  $F_y$  και  $a$ , ταυτοποιούνται γρήγορα. Όμως, για τον αντίθετο ακριβώς λόγο, η ευαισθησία των παραμέτρων που καθορίζουν την μετάβαση μεταξύ των κλάδων της απόκρισης, ήτοι οι παράμετροι  $\gamma$  και  $n$ , είναι μικρή. Στην προτεινόμενη μέθοδο, η συνθήκη τερματισμού ορίζεται με βάση την συρρίκνωση του εύρους των επιτρεπτών τιμών όλων των παραμέτρων και όχι με βάση μια προκαθορισμένη τιμή κατωφλίου της αντικειμενικής συνάρτησης. Έτσι, η καλύτερη απόδοση μεταξύ των περιπτώσεων 1α – 1γ παρατηρείται για την περίπτωση 1β, στην οποία το σύστημα μόλις εισέρχεται στην μετελαστική περιοχή και η ευαισθησία όλων των παραμέτρων είναι της ίδιας τάξης μεγέθους (Εικόνα 5.8.2β).

### 5.8.3 Σύστημα με ιξώδη απόσβεση

Όταν η ιξώδης απόσβεση θεωρείται άγνωστη, η διαδικασία ταυτοποίησης με χρήση ενός μόνο πειράματος απλής αρμονικής διέγερσης ενίοτε αποτυγχάνει προβλέποντας τιμές του συντελεστή ιξώδους απόσβεσης μεγαλύτερες του πραγματικού. Αυτό συμβαίνει διότι, υπό απλή αρμονική διέγερση, η απόσβεση αποδίδεται πιο εύκολα στον συντελεστή ιξώδους απόσβεσης παρά στην υστερητική απόσβεση του προσομοιώματος. Σημειώνεται όμως ότι η ιξώδης απόσβεση εξαρτάται έντονα από την συχνότητα και την ένταση της αρμονικής διέγερσης [127]. Έτσι, το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά συνδυάζοντας δύο πειράματα διαφορετικής έντασης ή/και συχνότητας, π.χ. συνδυάζοντας τις περιπτώσεις 1β και 1γ. Σε αυτήν την περίπτωση, ως αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να ληφθεί η μέση τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων κάθε υπο-περίπτωσης. Με αυτό τον τρόπο, παρατηρείται ότι η διαδικασία ταυτοποίησης είναι πάντα επιτυχής.

Προς υποστήριξη των παραπάνω, θεωρούμε τρεις περιπτώσεις συστημάτων με άγνωστη ιξώδη απόσβεση, ήτοι τις περιπτώσεις 2α – 2γ. Αυτές είναι, αντίστοιχα, μια αποτυχημένη απόπειρα χρησιμοποιώντας την περίπτωση 1β μόνο, ο συνδυασμός των περιπτώσεων 1β και 1γ και τέλος, η απόκριση του αγνώστου συστήματος υπό τον El Centro [126]. Ο Πίνακας 5.8.2 παρουσιάζει τις πραγματικές τιμές, τους αρχικούς πλευρικούς περιορισμούς και τις ταυτοποιημένες τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Τα αποτελέσματα αυτά είναι οι μέσες τιμές από 10 ανεξάρτητες αναλύσεις. Ο γραμμικός συντελεστής ιξώδους απόσβεσης είναι ίσος με το 10% της κρίσιμης τιμής.

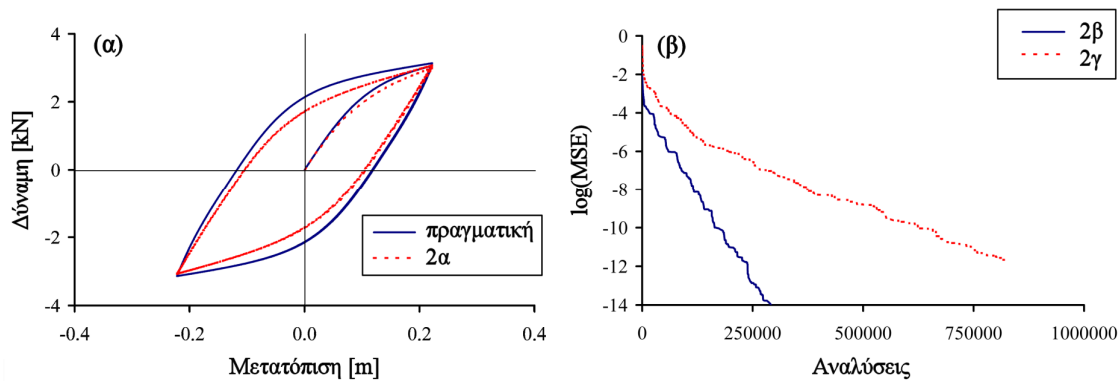
	$\gamma$	$n$	$a$	$F_y$ [kN]	$u_y$ [m]	$c$ [kNs/m]
Πραγματική τιμή	0.9000	2.0000	0.1000	2.8600	0.1110	5.4292
Αρχικό κάτω όριο	0.0000	1.0000	0.0000	0.1000	0.0100	0.0000
Αρχικό άνω όριο	1.0000	10.0000	1.0000	10.0000	1.0000	100.0000
2α ( $u_{\max} = 2u_y$ )	0.6211	1.5397	0.1736	2.5542	0.1013	6.4835
2β ( $u_{\max} = 2u_y, 7u_y$ )	0.9000	2.0000	0.1000	2.8600	0.1110	5.4292
2γ (El Centro)	0.9000	2.0000	0.1000	2.8600	0.1110	5.4292

**Πίνακας 5.8.2: Πραγματικές και ταυτοποιημένες τιμές παραμέτρων με ιξώδη απόσβεση**

Οι διαφορές των συντελεστών της μεθόδου σε σχέση με την §5.8.2 είναι οι εξής:

- ο Πλήθος άγνωστων παραμέτρων  $N_p = 6$ ,
- ο Συνολικό μήκος χρωμοσώματος  $L_c = 6 \times 10 = 60$  δύφια.

Η Εικόνα 5.8.3α δείχνει τον υστερητικό βρόχο της περίπτωσης 2α συγκρινόμενο με την πραγματική απόκριση του συστήματος. Στις περιπτώσεις 2β και 2γ, οι άγνωστες παράμετροι του συστήματος (συμπεριλαμβανομένου και του γραμμικού συντελεστή ιξώδους απόσβεσης  $c$ ) ταυτοποιούνται «ακριβώς», ήτοι με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. Σημειώνεται όμως ότι η περίπτωση του συνδυασμού των πειραμάτων 1β και 1γ παρουσιάζει χονδρικά τρεις φορές καλύτερη απόδοση σε σχέση με το πείραμα με την σεισμική διέγερση (Εικόνα 5.8.3β).



Εικόνα 5.8.3: Σχετική απόδοση προτεινόμενης μεθόδου με ιξώδη απόσβεση

#### 5.8.4 Θόρυβος

Η προτεινόμενη μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για την ταυτοποίηση ενός άγνωστου συστήματος με παρατηρούμενα δεδομένα που περιέχουν θόρυβο. Τα παρατηρούμενα δεδομένα προέκυψαν από ένα νοητό πείραμα ενώ ο θόρυβος προστέθηκε εκ των υστέρων σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\bar{y}(t_i) = (1 + \varepsilon r_i) y(t_i) \quad (5.8.1)$$

όπου:

- $r_i$  είναι μια διαδοχή αριθμών τυχαίας μεταβλητής με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(-1,1)$ ,
- $\varepsilon$  είναι ο λόγος της στάθμης του θορύβου προς την στάθμη του σήματος (Noise to Signal Ratio – NSR).

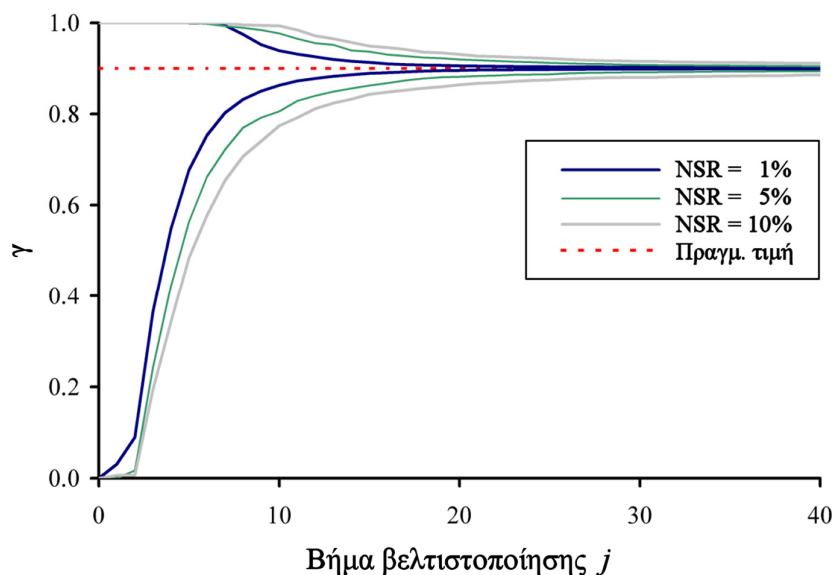
Εξετάστηκαν τρεις περιπτώσεις επιπέδου θορύβου, ήτοι οι περιπτώσεις 3α – 3γ, με NSR ίσο με 1%, 5% και 10%, αντίστοιχα. Για τις αναλύσεις χρησιμοποιήθηκε η σεισμική διέγερση του El Centro [126] ενώ η ταλαντούμενη μάζα ήταν ίση με  $28.6kNs^2/m$ . Οι αρχικοί πλευρικοί περιορισμοί και οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων του συστήματος είναι ίδιοι

με την περίπτωση της §5.8.3 (Πίνακας 5.8.2). Η ιξώδης απόσβεση θεωρείται άγνωστη παράμετρος προς ταυτοποίηση.

Ο Πίνακας 5.8.3 συνοψίζει τις μέσες ταυτοποιημένες τιμές των παραμέτρων που προκύπτουν από 10 ανεξάρτητες αναλύσεις. Είναι φανερό ότι, με δεδομένη την ύπαρξη του θορύβου, η ταυτοποίηση ήταν απόλυτα επιτυχής. Σημειώνεται ότι δεν εφαρμόστηκε κάποιο φίλτρο απομάκρυνσης θορύβου πριν την χρήση των δεδομένων.

	$\gamma$	$n$	$a$	$F_y$ [kN]	$u_y$ [m]	$c$ [kNs/m]
Πραγματική τιμή	0.9000	2.0000	0.1000	2.8600	0.1110	5.4292
3α (NSR = 1%)	0.9010	1.9998	0.1000	2.8608	0.1110	5.4261
3β (NSR = 5%)	0.9019	2.0096	0.1001	2.8569	0.1110	5.4369
3γ (NSR = 10%)	0.8993	1.9953	0.0995	2.8642	0.1111	5.4014

Πίνακας 5.8.3: Ταυτοποιημένες τιμές παραμέτρων (δεδομένα με θόρυβο)



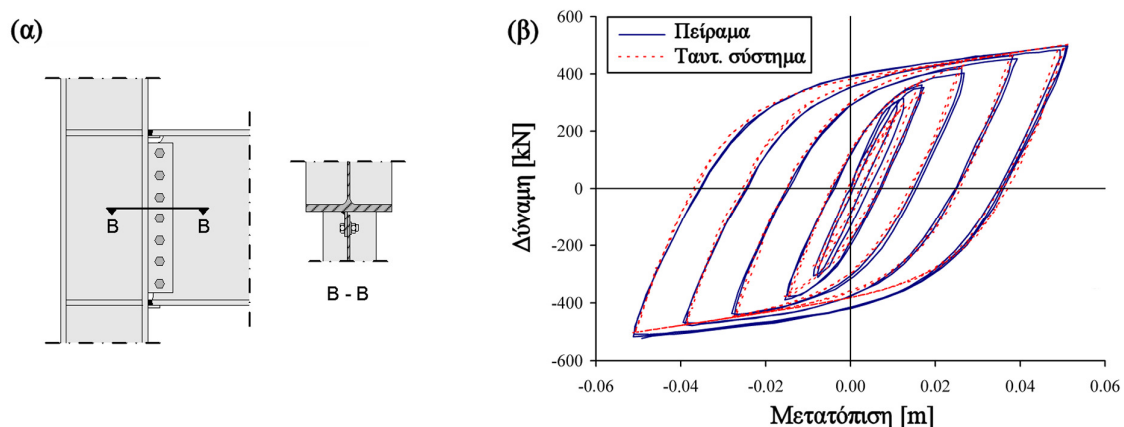
Εικόνα 5.8.4: Συρρίκνωση χώρου λύσεων παραμέτρου  $\gamma$  (δεδομένα με θόρυβο)

Επιπλέον, η Εικόνα 5.8.4 παρουσιάζει την πρόοδο της συρρίκνωσης του χώρου των λύσεων της παραμέτρου  $\gamma$  σε συνάρτηση με το βήμα βελτιστοποίησης  $j$ . Το γράφημα

βασίζεται σε μέσες τιμές 10 ανεξάρτητων αναλύσεων. Η παράμετρος  $\gamma$  επιλέχθηκε διότι τυπικά είναι μεταξύ των λιγότερο ευαίσθητων παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen. Όπως ήταν αναμενόμενο, παρατηρείται ότι η συρρίκνωση του χώρου των λύσεων είναι ταχύτερη στην περίπτωση χαμηλότερης στάθμης θορύβου.

### 5.8.5 Ταυτοποίηση με πραγματικά πειραματικά δεδομένα

Η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ταυτοποίηση των παραμέτρων ενός συστήματος Bouc-Wen με βάση διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα, π.χ. [144]. Εν προκειμένω, το σύστημα προς ταυτοποίηση αναπαριστά μια μεταλλική σύνδεση δοκού – υποστυλώματος. Το πείραμα, συγκεκριμένα το πείραμα Νο. 5, εκτελέστηκε σε πραγματική κλίμακα από τους E. Popon και R. Stephen στο Berkeley το 1970 [128]. Αναφέρεται σε μια δοκό WF 24 x 76 (ποιότητας A36) η οποία ήταν συνδεδεμένη με ακλόνητο υποστύλωμα. Τα πέλματα της δοκού ήταν συγκολλημένα στο υποστύλωμα ενώ ο κορμός ήταν κοχλιωμένος με επτά κοχλίες 7/8" (Εικόνα 5.8.5α). Το ελεύθερο άκρο της δοκού υποβλήθηκε σε μια επιβεβλημένη ανακυκλιζόμενη μετατόπιση. Η σύνδεση παρουσίασε καθαρή υστερητική απόκριση χωρίς φαινόμενα μείωσης της αντοχής, μείωσης της δυσκαμψίας ή στένωσης του διαγράμματος δύναμης – παραμόρφωσης.



Εικόνα 5.8.5: Ταυτοποίηση με χρήση πραγματικών πειραματικών δεδομένων

Οι αρχικοί πλευρικοί περιορισμοί και οι ταυτοποιημένες τιμές παρουσιάζονται στον σχετικό πίνακα (Πίνακας 5.8.4). Σημειώνεται ότι δεν έγινε καμία προσπάθεια εκτίμησης των πραγματικών τιμών. Συγκεκριμένα, οι πλευρικοί περιορισμοί των παραμέτρων  $F_y$  και  $u_y$  επιλέχθηκαν με μια απλή ματιά στο διάγραμμα δύναμης – παραμόρφωσης. Η χρησιμοποίηση ακόμη μεγαλύτερων διαστημάτων δεν επηρεάζει σημαντικά την απόδοση της μεθόδου, διότι οι μη ρεαλιστικές τιμές απορρίπτονται από τα αρχικά στάδια της ταυτοποίησης.

	$\gamma$	$n$	$a$	$F_y$ [kN]	$u_y$ [m]
Αρχικό κάτω όριο	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0010
Αρχικό άνω όριο	1.0000	10.0000	1.0000	1000.0000	0.1000
Ταυτοποιημένη τιμή	1.0000	1.3248	0.0756	420.2587	0.0142

**Πίνακας 5.8.4: Αρχικοί πλευρικοί περιορισμοί και ταυτοποιημένες τιμές (πραγματικά δεδομένα)**

Παρατηρείται ότι η απόκριση του ταυτοποιημένου συστήματος είναι σε καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα (Εικόνα 5.8.5β). Ως ένδειξη της σταθερότητας της προτεινόμενης μεθόδου, σημειώνεται ότι εκτελέστηκαν πλήθος ανεξάρτητων αναλύσεων και τα τελικά αποτελέσματα ήταν σχεδόν πανομοιότυπα. Η τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (δηλαδή η τελική τιμή του Κανονικοποιημένου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος) ήταν περίπου 0.51%. Παρ' όλα αυτά, η τιμή 0.59% επιτεύχθηκε κατά μέσο όρο μετά από 5000 μόλις αναλύσεις. Σημειώνεται επίσης ότι τα πειραματικά δεδομένα παρουσιάζουν μια μικρή ασυμμετρία. Αυτό το χαρακτηριστικό δεν μπορεί να αντιμετωπισθεί με το συμμετρικό προσομοίωμα Bouc-Wen που χρησιμοποιήθηκε.

### 5.8.6 Παραμετρικές μελέτες

Για την ανάδειξη του μηχανισμού πίσω από την προτεινόμενη μέθοδο ταυτοποίησης, συντάχθηκε μια σειρά παραμετρικών μελετών. Ο Πίνακας 5.8.5 και ο Πίνακας 5.8.6 παρουσιάζουν την διαμόρφωση του υβριδικού εξελικτικού αλγόριθμου και του μηχανισμού συρρίκνωσης του χώρου των λύσεων, αντίστοιχα. Στην περίπτωση μεταβαλλόμενων

συντελεστών (σύμφωνα με την §5.7.6), παρουσιάζονται τόσο η αρχική όσο και η τελική τιμή του συντελεστή χωριζόμενες με το σύμβολο «/». Για όλες τις αναλύσεις χρησιμοποιήθηκε η σεισμική διέγερση του El Centro [126] ενώ η ταλαντούμενη μάζα είναι ίση με  $28.6kNs^2/m$ . Η τιμή του συντελεστή ιξώδους απόσβεσης είναι ίση με το 10% της κρίσιμης τιμής και θεωρείται άγνωστη παράμετρος προς ταυτοποίηση. Οι αρχικοί πλευρικοί περιορισμοί και οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων του συστήματος είναι ίδιοι με την περίπτωση της §5.8.3 (Πίνακας 5.8.2).

Για λόγους σύγκρισης, η μέση απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου υπολογίζεται σε κάθε περίπτωση ως μέση τιμή 10 ανεξάρτητων αναλύσεων. Η απόδοση προκύπτει με βάση το πλήθος των αναλύσεων (function evaluations) για ένα συγκεκριμένο επίπεδο τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Τα τελικά αποτελέσματα της ταυτοποίησης δεν παρουσιάζονται, αφού σε κάθε περίπτωση μια τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κοντά στο  $10^{-10}$  σημαίνει ότι οι άγνωστες παράμετροι έχουν ταυτοποιηθεί «ακριβώς», δηλαδή με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

Οι περιπτώσεις A1 ως A4 (Εικόνα 5.8.6α) αναδεικνύουν την επίδραση της περιόδου  $T$  του Sawtooth-GA στην συνολική απόδοση. Αν και προτείνονται τιμές του λόγου  $T/N_m$  κοντά στο 0.50 [123], στην προτεινόμενη μέθοδο ακόμη μικρότερες τιμές της περιόδου ευνοούν την απόδοση. Αυτό υποδηλώνει ότι η αρχικοποίηση του πληθυσμού είναι περισσότερο σημαντική από την διασταύρωση των λύσεων. Αυτή η συμπεριφορά υποβοηθείται από την σχετικά αδρή διακριτοποίηση του χώρου των λύσεων.

Οι περιπτώσεις B1 και B4, συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες περιπτώσεις A1 και A4, αποδεικνύουν ότι διαφορετικοί συνδυασμοί του μέσου πληθυσμού  $N_m$  και του πλήθους  $K_T$  των περιόδων του Sawtooth-GA παρουσιάζουν παρόμοια απόδοση (Εικόνα 5.8.6β). Για παράδειγμα, τόσο η περίπτωση A1 όσο και η B1 περιλαμβάνουν 375 αναλύσεις, ενώ κατά την διάρκεια της αρχικοποίησης εισάγονται στον πληθυσμό 125 και 123 τυχαίες λύσεις, αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που η τιμή του μέσου πληθυσμού  $N_m$  θεωρηθεί σταθερή και ίση με 25, οι περιπτώσεις C1 και C2 υποδεικνύουν ότι λίγες περιόδους του Sawtooth-GA είναι επαρκείς για να δώσουν μια καλή αρχική λύση για τον αλγόριθμο τοπικής βελτιστοποίησης GAHC (Εικόνα 5.8.6γ).

Οι περιπτώσεις D1 ως D3 (Εικόνα 5.8.6δ) αναδεικνύουν την επίδραση του μήκους του χρωμοσώματος στην συνολική απόδοση της μεθόδου. Αποδεικνύεται ότι πολύ μικρό ή πολύ μεγάλο μήκος χρωμοσώματος οδηγεί σε μειωμένη απόδοση. Στην πρώτη περίπτωση (περίπτωση D1) ευθύνεται η ανεπαρκής διακριτοποίηση του χώρου των λύσεων ενώ στην δεύτερη περίπτωση (περίπτωση D2) ευθύνεται το μεγάλο πλήθος των αναλύσεων που απαιτεί ο αλγόριθμος GAHC για να εντοπίσει το τοπικό βέλτιστο. Η χρησιμοποίηση μεταβαλλόμενου μήκους χρωμοσώματος δεν φαίνεται να αυξάνει την απόδοση (περίπτωση D3).

Οι περιπτώσεις E1 και E2 (Εικόνα 5.8.6ε) αναδεικνύουν τον αποφασιστικό ρόλο που παίζει ο αλγόριθμος τοπικής βελτιστοποίησης GAHC στην συνολική απόδοση. Η περίπτωση E1 είναι πανομοιότυπη με την περίπτωση A1 (η οποία αποτελεί βάση αναφοράς) χωρίς τον αλγόριθμο GAHC, ενώ η περίπτωση E2 περιλαμβάνει δύο επιπλέον περιόδους του Sawtooth-GA οι οποίες αντισταθμίζουν χονδρικά τις επιπλέον αναλύσεις που απαιτούνται λόγω του GAHC.

Οι περιπτώσεις F1 και F2 (Εικόνα 5.8.6στ) αναδεικνύουν την ευεργετική επίδραση της απόρριψης των χειρότερων λύσεων. Παρατηρείται ότι ακόμη και όταν απορρίπτεται μικρό ποσοστό των λύσεων (περίπτωση F2), η απόδοση αυξάνεται σημαντικά.

Ο συντελεστής  $q$  είναι ένας από τους πλέον σημαντικούς συντελεστές της προτεινόμενης μεθόδου ταυτοποίησης. Καθώς η ταυτοποίηση προοδεύει, η σταθμισμένη τυπική απόκλιση  $s_i$  γίνεται σταδιακά συγκρίσιμη σε μέγεθος με το ολοένα συρρικνούμενο διάστημα επιτρεπτών τιμών. Συνεπώς, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται μια σχετικά μεγάλη τιμή του συντελεστή  $q$  στην αρχή της διαδικασίας, έτσι ώστε να διασφαλιστεί ότι η βέλτιστη τιμή θα παραμείνει εντός του χώρου των λύσεων. Στην συνέχεια, ο συντελεστής  $q$



μπορεί να μειωθεί σταδιακά ώστε να επιταχυνθεί η διαδικασία σύγκλισης. Τα παραπάνω παρουσιάζονται στις περιπτώσεις G1 και G2 (Εικόνα 5.8.6ζ), στις οποίες η τελική τιμή του συντελεστή  $q$  είναι ίση με 2.5 και 2.0 αντίστοιχα.

Τέλος, η απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου είναι άμεσα συνδεδεμένη με το μέγεθος του στατιστικού δείγματος, ήτοι με τον συντελεστή  $M_r$ . Αυτό παρουσιάζεται στις περιπτώσεις H1 και H2 (Εικόνα 5.8.6η), στις οποίες το συνολικό μέγεθος του δείγματος περιορίζεται σε 30 και 20 τοπικά βέλτιστα, αντίστοιχα.

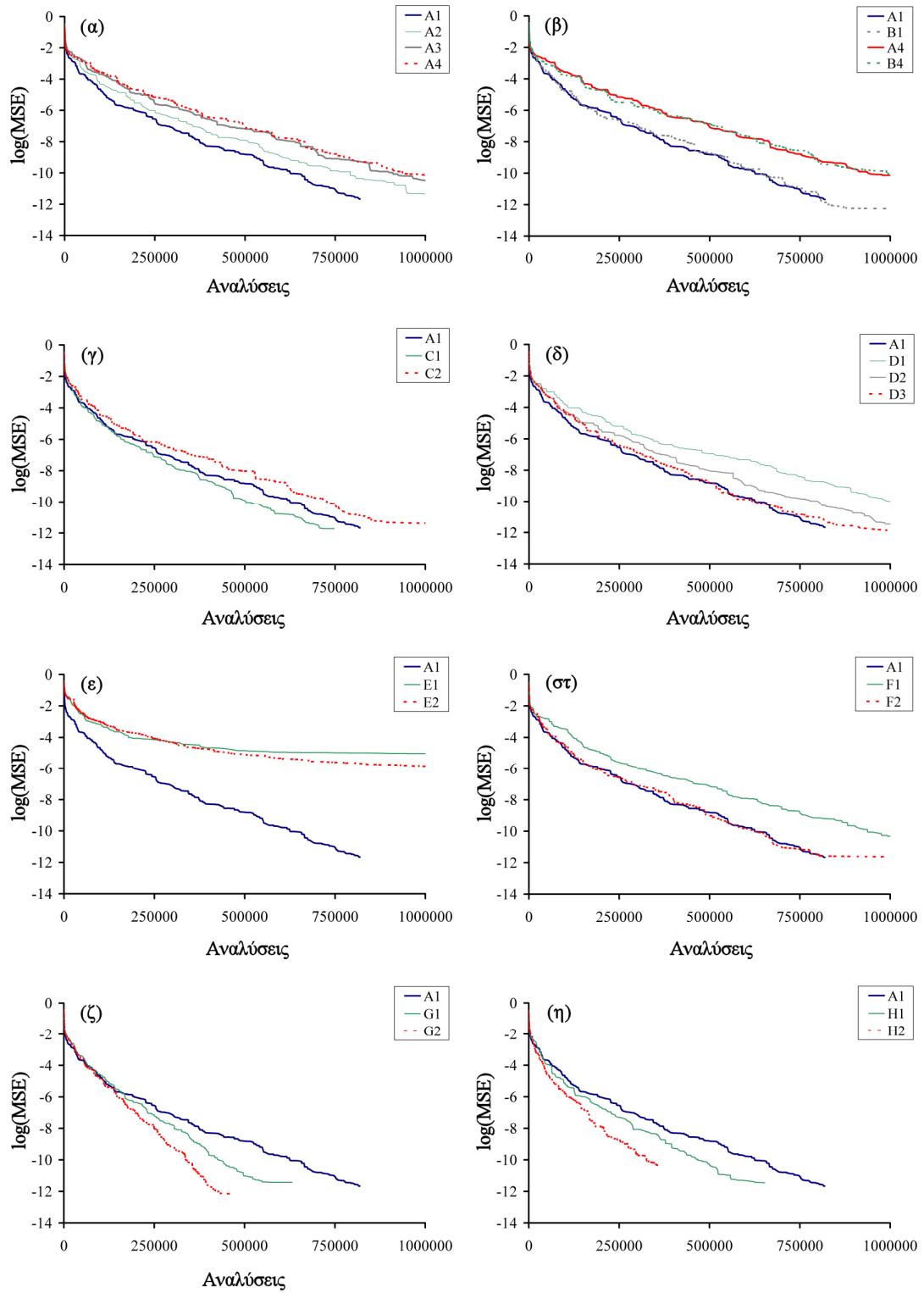
Όλες οι αναλύσεις που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο αυτή συνέκλιναν με ασφάλεια στις πραγματικές τιμές. Παρ' όλα αυτά, είναι προφανές ότι μικρές τιμές του συντελεστή  $q$  ή ανεπαρκές μέγεθος δείγματος  $M_r$  μπορεί να οδηγήσει υπό περιπτώσεις σε αποτυχία της μεθόδου. Αυτό το ενδεχόμενο εξαρτάται από την διέγερση και τις αρχικές τιμές των πλευρικών περιορισμών των παραμέτρων. Αν και παρουσιάζεται ένα περιορισμένο πλήθος αναλύσεων, τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις παραμετρικές μελέτες βασίζονται σε ένα πολύ μεγαλύτερο πλήθος αναλύσεων.

Περίπτωση	$N_m$	$D$	$T$	$K_T$	$L_g$	GAHC
A1	25	20	5	3	10	Ναι
A2	25	20	10	3	10	Ναι
A3	25	20	15	3	10	Ναι
A4	25	20	20	3	10	Ναι
B1	15	12	5	5	10	Ναι
B4	15	12	20	5	10	Ναι
C1	25	20	5	2	10	Ναι
C2	25	20	5	4	10	Ναι
D1	25	20	5	3	8	Ναι
D2	25	20	5	3	15	Ναι
D3	25	20	5	3	15/10	Ναι
E1	25	20	5	3	10	Όχι
E2	25	20	5	5	10	Όχι
F - H	25	20	5	3	10	Ναι

Πίνακας 5.8.5: Διαμόρφωση υβριδικού εξελικτικού αλγορίθμου

Περίπτωση	$M_r$	$M_t$	$q$
A - E	40	10	3.0
F1	30	0	3.0
F2	35	5	3.0
G1	40	10	3.0/2.5
G2	40	10	3.0/2.0
H1	30	8	3.0
H2	20	5	3.0

Πίνακας 5.8.6: Διαμόρφωση μηχανισμού συρρίκνωσης του χώρου των λύσεων



Εικόνα 5.8.6: Παραμετρικές μελέτες προτεινόμενης μεθόδου ταυτοποίησης

### 5.8.7 Σύγκριση με Standard-GA και Micro-GA

Για την ανάδειξη των πλεονεκτημάτων της προτεινόμενης μεθόδου, πραγματοποιήθηκε μια συγκριτική μελέτη με τους αλγορίθμους Standard-GA (§5.4.6) και Micro-GA (§5.4.7). Η σύγκριση αφορά τόσο την μέση απόδοση του αλγορίθμου όσο και την ακρίβεια στην ταυτοποίηση των παραμέτρων.

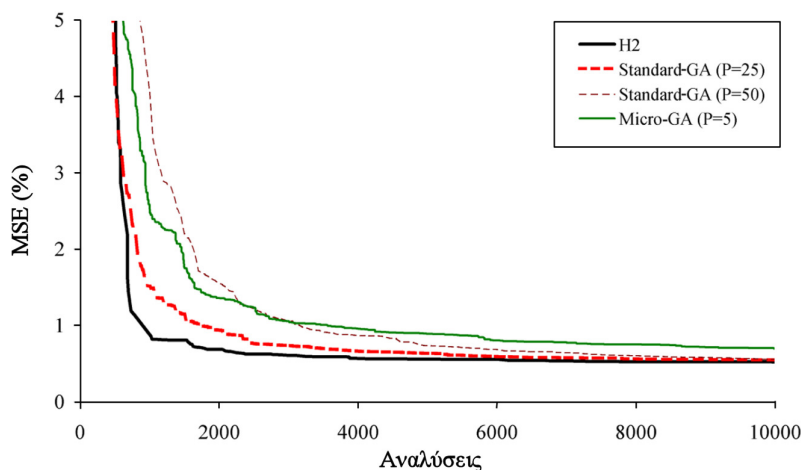
Πραγματοποιήθηκε ταυτοποίηση των παραμέτρων του υστερητικού συστήματος της μονόπακτης δοκού (§5.8.5) με τον Standard-GA με ελιτισμό και δύο περιπτώσεις πληθυσμού, ήτοι  $P = 25$  και  $P = 50$ . Χρησιμοποιήθηκαν αντίστοιχες με την προτεινόμενη μέθοδο ρυθμίσεις, ως εξής:

- Μήκος γονιδίου  $L_g = 10$  δύφια,
- Πλήθος άγνωστων παραμέτρων  $N_p = 5$ ,
- Συνολικό μήκος χρωμοσώματος  $L_c = 5 \times 10 = 50$  δύφια,
- Τελεστής διασταύρωσης μονού σημείου με πιθανότητα 0.7 ,
- Τελεστής απλής μετάλλαξης με πιθανότητα  $1/P$  ,
- Τελεστής έρπουσας μετάλλαξης με πιθανότητα  $L_c/N_p/P$  ,
- Ελιτισμός.

Επιπλέον, έγινε ταυτοποίηση των άγνωστων παραμέτρων με τον Micro-GA. Οι συντελεστές του αλγορίθμου έχουν ως εξής:

- Πληθυσμός  $P = 5$  άτομα,
- Μήκος γονιδίου  $L_g = 10$  δύφια,
- Πλήθος άγνωστων παραμέτρων  $N_p = 5$ ,
- Συνολικό μήκος χρωμοσώματος  $L_c = 5 \times 10 = 50$  δύφια,
- Τελεστής διασταύρωσης μονού σημείου.

Η μέση απόδοση, η οποία προέκυψε από 30 ανεξάρτητες αναλύσεις, δείχνει ότι για το συγκεκριμένο πρόβλημα η προτεινόμενη μέθοδος υπερτερεί (Εικόνα 5.8.7).



**Εικόνα 5.8.7: Σύγκριση προτεινόμενης μεθόδου με Standard-GA και Micro-GA**

Αναφορικά με την ακρίβεια ταυτοποίησης, η προτεινόμενη μέθοδος υπερέχει διότι ο χώρος των επιτρεπτών λύσεων συρρικνώνεται συνεχώς. Συνεπώς, είναι εφικτή η ταυτοποίηση των παραμέτρων με όση «ακρίβεια» είναι επιθυμητή, κάτι το οποίο επιβεβαιώνεται με χρήση νοητών πειραμάτων στα οποία οι ακριβείς τιμές των παραμέτρων είναι γνωστές. Αυτή η δυνατότητα δεν απαντάται στους αλγόριθμους Standard-GA και Micro-GA αφού, σε αυτές τις περιπτώσεις, τόσο το μέγεθος όσο και η διακριτοποίηση του χώρου των λύσεων παραμένουν σταθερά καθ' όλη την διαδικασία.

### 5.8.8 Σύγκριση με PSO

Για την ανάδειξη των πλεονεκτημάτων της προτεινόμενης μεθόδου, πραγματοποιήθηκε μια συγκριτική μελέτη με τον αλγόριθμο PSO (§5.4.9). Για τις ανάγκες της συγκριτικής μελέτης, πραγματοποιήθηκε ταυτοποίηση των παραμέτρων του υστερητικού συστήματος της μονόπακτης δοκού (§5.8.5). Χρησιμοποιήθηκαν δύο εκδόσεις του αλγόριθμου PSO. Η πρώτη έκδοση, η οποία μπορεί να θεωρηθεί «βασική», ορίζεται ως εξής:

- ο Πληθυσμός  $p = 20$  άτομα,
- ο Συντελεστής εγωιστικής συμπεριφοράς  $c_1 = 2$ ,
- ο Συντελεστής κοινωνικής συμπεριφοράς  $c_2 = 2$ ,
- ο Συντελεστής αδράνειας  $w = 0.8$ .

Η δεύτερη έκδοση, η οποία μπορεί να θεωρηθεί «προηγμένη», χρησιμοποιεί ένα πλήθος τελεστών οι οποίοι έχουν αναφερθεί ότι αυξάνουν την απόδοση. Η υλοποίηση βασίζεται σε μελέτη των Fourie και Groenwold [100], οι οποίοι συνέκριναν την μέθοδο PSO με τον Γενετικό Αλγόριθμο του Caroll [108] καθώς και με μια δική τους υλοποίηση Γενετικών Αλγορίθμων. Τα αποτελέσματά τους υποδεικνύουν ότι ο αλγόριθμος PSO εμφανίζει καλύτερη απόδοση για ένα πλήθος τυποποιημένων προβλημάτων βελτιστοποίησης. Οι συντελεστές της μεθόδου λήφθηκαν ως εξής [100]:

- ο Πληθυσμός  $p = 20$  άτομα,
- ο Συντελεστής εγωιστικής συμπεριφοράς  $c_1 = 0.5$ ,
- ο Συντελεστής κοινωνικής συμπεριφοράς  $c_2 = 1.6$ ,
- ο Αρχικός συντελεστής αδράνειας  $w_0 = 1.40$ ,
- ο Μέγιστο πλήθος συνεχόμενων βημάτων χωρίς βελτίωση  $h = 3$ ,
- ο Συντελεστής μείωσης αδράνειας  $a = 0.99$ ,
- ο Συντελεστής μείωσης μέγιστης ταχύτητας  $\beta = 0.95$ ,
- ο Συντελεστής αρχικής μέγιστης ταχύτητας  $\gamma = 0.4$ ,
- ο Συντελεστής «παραλογισμού»  $P_{cr} = 0.22$ ,
- ο Ελιτισμός στα άτομα (elite particle),
- ο Ελιτισμός στην ταχύτητα (elite velocity),
- ο Συντελεστής ελιτισμού ταχύτητας  $c_3 = 1.30$ ,

όπου:

- Η αρχική μέγιστη ταχύτητα των ατόμων του σμήνους λαμβάνεται τέτοια ώστε σε ένα χρονικό βήμα κάποιο άτομο να μπορεί να διανύσει ένα συγκεκριμένο ποσοστό του χώρου των λύσεων:

$$\mathbf{v}_0^{\max} = \gamma (\mathbf{x}_{UB} - \mathbf{x}_{LB}) \quad (5.8.2)$$

όπου,  $\mathbf{x}_{UB}$  και  $\mathbf{x}_{LB}$  είναι τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις ανώτερες και κατώτερες επιτρεπτές τιμές των παραμέτρων, αντίστοιχα.

- Αν η βέλτιστη λύση που έχει παρατηρηθεί γενικά στο σμήνος δεν βελτιωθεί για  $h$  συνεχόμενες χρονικές στιγμές, τότε θεωρείται ότι οι ταχύτητες των ατόμων είναι υψηλές και δεν επιτρέπουν στον αλγόριθμο να εντοπίσει τις βέλτιστες λύσεις (overshooting). Για τον λόγο αυτό γίνεται μείωση τόσο του συντελεστή αδράνειας όσο και του διανύσματος μέγιστης ταχύτητας ως εξής:

$$\text{If } OF(\mathbf{p}_g)|_k \geq OF(\mathbf{p}_g)|_{k-h} \Rightarrow w_{k+1} = a w_k, \mathbf{v}_{k+1}^{\max} = \beta \mathbf{v}_k^{\max} \quad (5.8.3)$$

- Κατ' αντιστοιχία με την μετάλλαξη των Γενετικών Αλγορίθμων, ο τελεστής «παραλογισμού» προσδίδει σε κάποιο άτομο ένα τυχαίο διάνυσμα ταχύτητας, με αποτέλεσμα αυτό να απομακρυνθεί από το σμήνος και να βρεθεί σε περιοχές του χώρου των λύσεων που πιθανότατα δεν έχουν εξερευνηθεί. Ο τελεστής εφαρμόζεται με κάποια μικρή πιθανότητα  $P_{cr}$  ως εξής:

$$\text{If } r < P_{cr} \Rightarrow \text{randomly assign } \mathbf{v}_{k+1} \text{ with } \mathbf{0} < \mathbf{v}_{k+1} \leq \mathbf{v}_{k+1}^{\max} \quad \forall \text{ particle } d \quad (5.8.4)$$

όπου  $r$  είναι μια τιμή τυχαίας μεταβλητής με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0,1]$ .

- Κατ' αντιστοιχία με τον ελιτισμό των Γενετικών Αλγορίθμων, εφαρμόζεται ελιτισμός τόσο στην θέση όσο και στην ταχύτητα. Έτσι, το άτομο του σμήνους του οποίου η θέση αντιστοιχεί στην λιγότερο εύρωστη λύση μετατίθεται και καταλαμβάνει την βέλτιστη θέση που έχει παρατηρηθεί γενικά σε ολόκληρο το σμήνος:

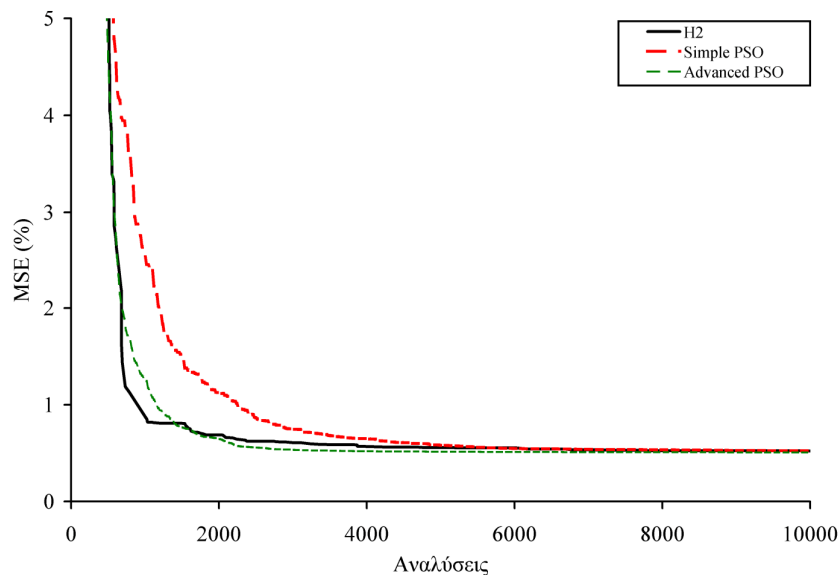
$$\mathbf{x}^{pe} = \mathbf{p}_g \quad (5.8.5)$$

Επίσης, αν η ταχύτητα  $\mathbf{v}_k^d$  είχε ως αποτέλεσμα την βελτίωση του  $\mathbf{p}_g$ , τότε

$$\mathbf{x}_{k+1}^d = \mathbf{p}_g + c_3 r \mathbf{v}^{pe} \quad (5.8.6)$$

όπου,  $\mathbf{v}^{pe} = \mathbf{v}_k^d$ ,  $c_3$  είναι ένας συντελεστής της μεθόδου και  $r$  είναι μια τιμή τυχαίας μεταβλητής με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0,1]$ .

Η μέση απόδοση όλων των αλγορίθμων υπολογίστηκε με βάση 30 ανεξάρτητες αναλύσεις. Τα αποτελέσματα (Εικόνα 5.8.8) δείχνουν ότι, για το συγκεκριμένο πρόβλημα, η προτεινόμενη μέθοδος είναι ανώτερη της «βασικής» έκδοσης PSO και ευθέως ανταγωνιστική με την «προηγμένη» έκδοση. Σημειώνεται ότι στα δεδομένα του συγκεκριμένου πειράματος δεν προστέθηκε θόρυβος σύμφωνα με την §5.8.4, ενώ έχει αναφερθεί ότι ο αλγόριθμος PSO αντιμετωπίζει προβλήματα με την ύπαρξη θορύβου στα δεδομένα [105].



Εικόνα 5.8.8: Σύγκριση προτεινόμενης μεθόδου με τον αλγόριθμο PSO

### 5.8.9 Προτεινόμενες τιμές συντελεστών

Οι συντελεστές της προτεινόμενης μεθόδου που αντιστοιχούν στην περίπτωση A1 (Πίνακας 5.8.5 και Πίνακας 5.8.6) μπορούν να θεωρηθούν συντηρητικοί για κάθε πρόβλημα



παρόμοιας πολυπλοκότητας. Αυτές οι ρυθμίσεις χρησιμοποιήθηκαν για τις κύριες αναλύσεις που παρουσιάστηκαν στην §5.8.2 και την §5.8.3. Οι ρυθμίσεις που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις G2 και H2 παρουσιάζουν αυξημένη απόδοση και χρησιμοποιήθηκαν για την περίπτωση δεδομένων με θόρυβο (§5.8.4) και την περίπτωση της μονόπακτης δοκού (§5.8.5), αντίστοιχα.

Για προβλήματα με περισσότερες παραμέτρους, τόσο η εξερεύνηση του χώρου των λύσεων όσο και η δειγματοληψία τοπικών βέλτιστων θα πρέπει να είναι πιο έντονη. Οι προτεινόμενες τιμές των συντελεστών έχουν ως εξής:

- Μέσος πληθυσμός  $N_m$  του αλγόριθμου γενετικού αλγορίθμου Sawtooth ίσος με 30% ως 50% του μήκους χρωμοσώματος  $L_c$ ,
- Ημιεύρος μεταβολής πληθυσμού  $D$  τέτοιο ώστε η διαφορά  $N_m - D$  να είναι ίση με 1 ως 5,
- Μέγεθος στατιστικού δείγματος  $M_r$  το πολύ ίσο με  $N_p^2$ , όπου  $N_p$  το πλήθος των άγνωστων παραμέτρων,
- Πλήθος λύσεων  $M_l$  προς απόρριψη ίσο με 5% έως 20% του  $M_r$ .

Σημειώνεται όμως ότι κάθε πρόβλημα παρουσιάζει τα δικά του εγγενή χαρακτηριστικά. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση απαιτείται κάποιος πειραματισμός με τις ρυθμίσεις της προτεινόμενης μεθόδου.

[ΚΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ]

# 6

## Διαξονική Κάμψη με Προσομοιώματα Ινών



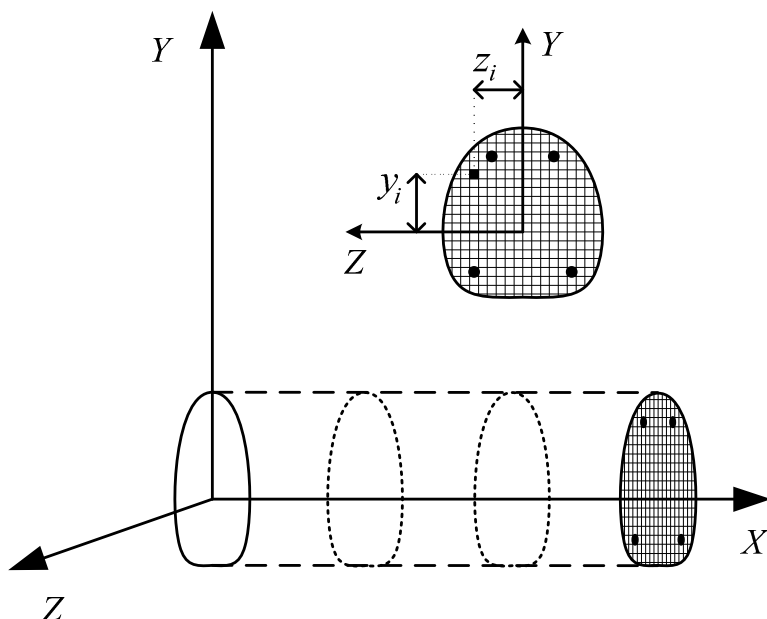
## 6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνεται μια νέα μέθοδος ανάλυσης τυχαίων διατομών με χρήση προσομοιωμάτων ινών (fiber models). Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό διαγραμμάτων ροπών-καμπυλοτήτων, διαγραμμάτων αλληλεπίδρασης καθώς και επιφανειών αστοχίας. Επιπλέον, μπορεί να υπολογίσει την παραμορφωμένη κατάσταση μιας τυχαίας διατομής υπό δεδομένη εξωτερική ένταση. Τέλος, παρουσιάζεται μια σειρά εφαρμογών οι οποίες αναδεικνύουν τα πλεονεκτήματα της προτεινόμενης μεθόδου έναντι των υπολοίπων της βιβλιογραφίας.

## 6.2 Προσομοιώματα ινών

Τα προσομοιώματα ινών βασίζονται στην θεώρηση ότι ένα μέλος μιας κατασκευής μπορεί να καταταμηθεί αφ' ενός σε κατά μήκος τμήματα (segments) τα οποία χωρίζονται από διατομές ελέγχου, και αφ' ετέρου σε ίνες (fibers) σε επίπεδο διατομής ελέγχου [150]. Κάθε ίνα κάθε ενός τμήματος συμπεριφέρεται με βάση μια συγκεκριμένη σχέση τάσης – παραμόρφωσης, ανάλογα με το υλικό και την θέση της (Εικόνα 6.2.1).

Τα προσομοιώματα ινών θεωρούνται θεμελιώδη (fundamental), λόγω της χρήσης ρεαλιστικών σχέσεων τάσεων – παραμορφώσεων των υλικών, οι οποίες μπορεί να λαμβάνουν υπόψη πλήθος φαινομένων όπως περίσφιγξη, παραμορφωσιακή κράτυνση κ.α. [150]. Επιπλέον, τα προσομοιώματα ινών αποτελούν σήμερα την πιο ορθολογική μέθοδο αντιμετώπισης θεμάτων όπως η διαξονική κάμψη με ταυτόχρονη αξονική δύναμη, η διανεμημένη πλαστικότητα, η στένωση του διαγράμματος ροπών – καμπυλοτήτων κ.α. Το κύριο μειονέκτημα των προσομοιωμάτων αυτών συνίσταται στο εξαιρετικά αυξημένο υπολογιστικό κόστος το οποίο μπορεί, υπό περιπτώσεις, να οδηγήσει σε αριθμητικές αστάθειες. Επιπλέον, δεν λαμβάνονται υπόψη θέματα σχετιζόμενα με ανελαστικές διατμητικές παραμορφώσεις, αλληλεπίδραση ορθών και διατμητικών τάσεων κ.λ.π. [150].



Εικόνα 6.2.1: Ανάλυση μέλους σε τμήματα και διατομών ελέγχου σε ίνες [150]

### 6.3 Διατύπωση του προβλήματος

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, κρίθηκε αναγκαία η ενσωμάτωση της συσσωρευμένης γνώσης γύρω από τα προσομοιώματα ινών. Παρουσιάστηκε μια νέα μέθοδος ανάλυσης τυχαιών διατομών η οποία αντιμετωπίζει με ενιαίο τρόπο τα μειονεκτήματα των υπαρχόντων μεθόδων της βιβλιογραφίας. Απώτερος σκοπός ήταν η δυνατότητα απόκτησης σημαντικών πληροφοριών σε θέματα όπως τα διαγράμματα ροπών – καμπυλοτήτων, η μέγιστη αντοχή, τα διαγράμματα αλληλεπίδρασης κ.α. *χωρίς την διενέργεια πειραμάτων*. Με χρήση κατάλληλων διαδικασιών ταυτοποίησης, οι οποίες παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 5, οι πληροφορίες αυτές χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση των παραμέτρων των προσομοιωμάτων Bouc – Wen. Οι πληροφορίες αυτές μπορούν επίσης να αξιοποιηθούν σε προσομοιώματα τύπου Bouc-Wen που λαμβάνουν υπόψη διαξονική αλληλεπίδραση, π.χ. [145].

## 6.4 Παραδοχές

Γενικά, τα προσομοιώματα ινών θεωρούν μικρές παραμορφώσεις και βασίζονται στην παραδοχή Euler – Bernoulli σύμφωνα με την οποία οι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες μετά την παραμόρφωση. Συνεπώς, αν θεωρήσουμε ότι ο άξονας  $X$  συμπίπτει με τον διαμήκη άξονα του μέλους, το πεδίο των ορθών παραμορφώσεων σε επίπεδο διατομής δίνεται από την σχέση [150]:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_0 + y \Phi_z - z \Phi_y \quad (6.4.1)$$

όπου:

- $\Phi_y, \Phi_z$  οι καμπυλότητες γύρω από τους άξονες  $Y$  και  $Z$ , αντίστοιχα,
- $\varepsilon_0$  η παραμόρφωση στην αρχή των αξόνων ( $y = 0, z = 0$ ).

Με εφαρμογή των διαγραμμάτων τάσεων – παραμορφώσεων των διαφόρων υλικών, το πεδίο των ορθών παραμορφώσεων μετατρέπεται σε πεδίο ορθών τάσεων. Η ολοκλήρωση του πεδίου των ορθών τάσεων οδηγεί στον υπολογισμό των συνισταμένων δυνάμεων, δηλαδή της αξονικής δύναμης  $N_x$  και των δύο ροπών  $M_y, M_z$  που αντιστοιχούν στην συγκεκριμένη παραμορφωσιακή κατάσταση.

Κατά την ανάλυση σε επίπεδο διατομής δεν είναι συνήθως πρακτική η διακριτοποίηση σε μικρές ίνες. Αντίθετα, η ανάλυση συνήθως βασίζεται στα περιγράμματα που καθορίζουν την θέση και την μορφή των διαφόρων υλικών μέσα στην διατομή. Ο λόγος για αυτήν την επιλογή είναι ότι μειώνεται σημαντικά το υπολογιστικό κόστος.

Όπως θα αναλυθεί στην συνέχεια, κατά την ολοκλήρωση του πεδίου των ορθών τάσεων είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη η χρήση του θεωρήματος του Green [166], με βάση το οποίο είναι δυνατή η μετατροπή επιφανειακών ολοκληρωμάτων σε επικαμπύλια. Αν θεωρήσουμε μια επίπεδη επιφάνεια  $D$  με περίγραμμα  $\partial D$ , τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Green [166]:

$$\oint_{\partial D} f(y, z) dy + g(y, z) dz = \iint_D \left( \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \right) dy dz \quad (6.4.2)$$

Εναλλακτικά, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί πιο συνοπτικά με χρήση διανυσματικού λογισμού, ως εξής:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} \quad (6.4.3)$$

Η απλούστερη εφαρμογή του θεωρήματος του Green είναι ο υπολογισμός του εμβαδού μιας επιφάνειας. Όταν η επιφάνεια  $D$  βρίσκεται στα αριστερά καθώς περιγράφεται από την καμπύλη  $\partial D$ , τότε το εμβαδόν της δίνεται από την σχέση:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx \quad (6.4.4)$$

Στην περίπτωση που το περίγραμμα  $\partial D$  δίνεται παραμετρικά ως  $(x(t), y(t))$ , τότε το εμβαδόν δίνεται από την σχέση:

$$A = \frac{1}{2} \int (x y' - y x') dt \quad (6.4.5)$$

## 6.5 Επισκόπηση υφιστάμενου ερευνητικού έργου

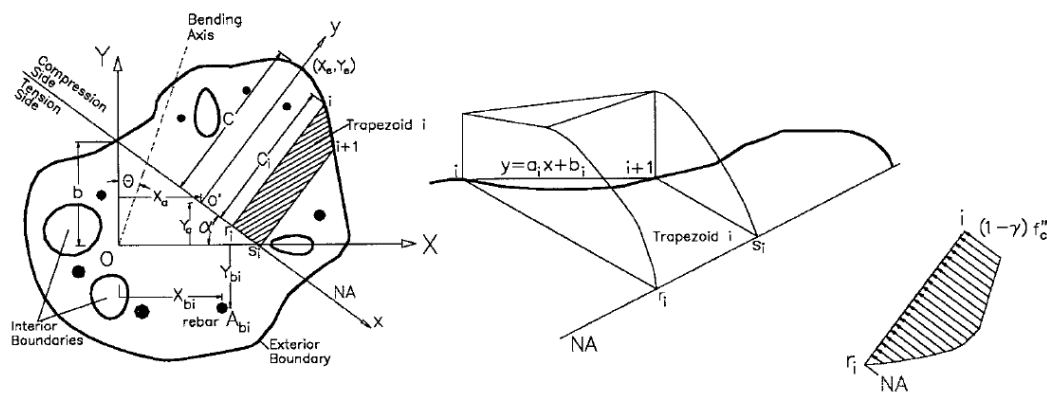
### 6.5.1 Γενικά

Όπως αποδεικνύεται από το πλήθος των πρόσφατων εργασιών πάνω στο θέμα, η ανάλυση τυχαίων διατομών με προσομοιώματα ινών έχει συγκεντρώσει το ενδιαφέρον των ερευνητών. Ο κυριότερος λόγος είναι ότι πολλές διατομές που χρησιμοποιούνται ευρέως, όπως για παράδειγμα οι διατομές μορφής «L», δεν είναι συμμετρικές και έτσι η ανάλυσή τους δεν είναι τετριμμένη. Με την έλευση των σύγχρονων Η/Υ έγινε δυνατή η ανάλυση των εν λόγω διατομών με χρήση των προσομοιωμάτων ινών. Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι κυριότερες εργασίες πάνω στο θέμα.



### 6.5.2 Rodriguez και Aristizabal-Ochoa (1999, 2001)

Οι Rodriguez και Aristizabal-Ochoa [156] παρουσίασαν κλειστές λύσεις για τον υπολογισμό των συνισταμένων δυνάμεων με χρήση της μεθόδου ολοκλήρωσης του Gauss. Η μέθοδος τους εφαρμόζεται σε πολυγωνικές διατομές και συνεπώς τυχούσες καμπύλες ακμές θα πρέπει να προσομοιωθούν με πολυγωνικές γραμμές.



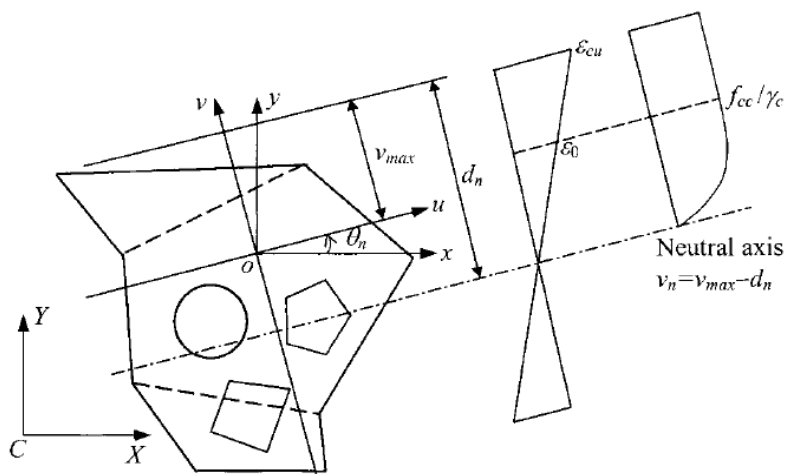
Εικόνα 6.5.1: Ανάλυση τυχασίας διατομής κατά Rodriguez και Aristizabal-Ochoa [156]

Για την αναλυτική ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων, η μέθοδος βασίζεται σε συγκεκριμένες μορφές διαγραμμάτων τάσεων – παραμορφώσεων των υλικών (Εικόνα 6.5.1). Συγκεκριμένα, για το θλιβόμενο σκυρόδεμα γίνεται χρήση μιας παραβολής και μιας ευθείας γραμμής ενώ για τον χάλυβα χρησιμοποιείται μια πολυγωνική γραμμή. Ο διαμήκης σπλισμός θεωρείται ότι αποτελείται από αδιάστατες ίνες (σημεία). Για την εύρεση της παραμορφωμένης κατάστασης της διατομής χρησιμοποιείται μια οιονεί-Νευτώνεια (quasi-Newton) μέθοδος, όπως αυτή παρουσιάστηκε από τους Brondum-Nielsen [147] και Yen [172].

Οι Rodriguez και Aristizabal-Ochoa, σε μεταγενέστερη εργασία τους [157], βελτίωσαν την μέθοδο τους έτσι ώστε να λαμβάνει υπόψη φαινόμενα παραμορφωσιακής κράτυνσης, ερπυσμού και συστολής ξήρανσης.

### 6.5.3 Chen et al. (2001)

Οι Chen et al. [149] χρησιμοποίησαν μια οιονει-Νευτώνεια μέθοδο για τον υπολογισμό της ακριβούς θέσης του ουδέτερου άξονα μιας τυχαίας πολυγωνικής διατομής. Η μέθοδος αυτή είχε χρησιμοποιηθεί προηγουμένως από τους Brondum-Nielsen [147] και Yen [172]. Αν και η μέθοδος παρουσιάζει εξαιρετικό ρυθμό σύγκλισης, παρατηρήθηκε ότι δεν συγκλίνει πάντα όταν εφαρμόζεται σε διατομές με έντονα έκκεντρη θέση οπλισμού και ενδεχομένως δομικού χάλυβα [149]. Οι Chen et al. πρότειναν την χρήση του πλαστικού κέντρου της διατομής ως αρχή των αξόνων για να αντιμετωπιστεί το ενδεχόμενο μη σύγκλισης του αλγορίθμου.

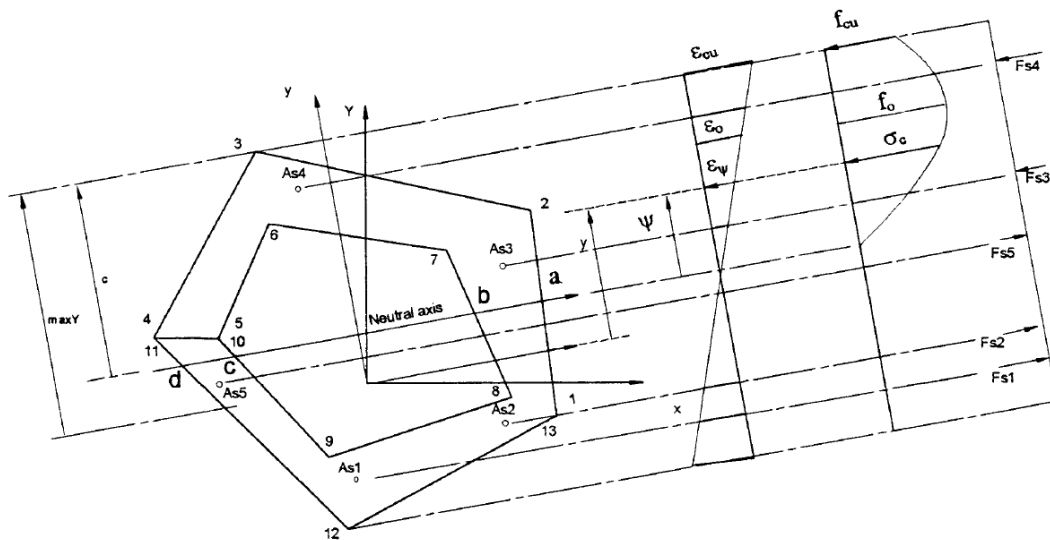


Εικόνα 6.5.2: Ανάλυση τυχαίας διατομής κατά Chen et al. [149]

Στην εν λόγω μέθοδο, το διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων του θλιβόμενου σκυροδέματος αποτελείται από μια παραβολή και μια ευθεία γραμμή ενώ δεν λαμβάνεται υπόψη η εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος (Εικόνα 6.5.2). Ο χάλυβας θεωρείται ότι ακολουθεί ένα απλό διγραμμικό διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων. Με βάση αυτά τα στοιχεία, παρουσιάστηκαν αναλυτικές εκφράσεις για την ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων σε πολυγωνικό χωρίο αλλά και σε κυκλική διατομή. Αντίθετα, ο δομικός χάλυβας διακρίτοποιείται σε ίνες ενώ ο διαμήκης οπλισμός θεωρείται ότι αποτελείται από αδιάστατες ίνες (σημεία).

### 6.5.4 Fafitis (2001)

Ο Fafitis [153] παρουσίασε μια μέθοδο για τον υπολογισμό διαγραμμάτων αλληλεπίδρασης διατομών οπλισμένου σκυροδέματος που υπόκεινται σε διαξονική κάμψη και αξονική δύναμη. Η μέθοδος βασίζεται στο θεώρημα του Green [166] για την ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων στην θλιβόμενη περιοχή του σκυροδέματος. Στην εν λόγω μέθοδο, ενδεχόμενα κενά μέσα στην διατομή συνδέονται με την εξωτερική περίμετρο μέσω φανταστικών τομών (fictitious cuts) (Εικόνα 6.5.3).



Εικόνα 6.5.3: Ανάλυση τυχαίας διατομής κατά Fafitis [153]

Με ολοκλήρωση κατά Gauss με τρία σημεία [167], η εν λόγω μέθοδος δίνει ακριβείς λύσεις στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται πολυώνυμα μέχρι τρίτου βαθμού για την περιγραφή της σχέσης τάσεων – παραμορφώσεων των υλικών. Αυτός ο περιορισμός ικανοποιείται στην περίπτωση των σχέσεων που χρησιμοποιούνται τόσο στους κανονισμούς του Ευρωκώδικα 2 [168] όσο και του American Concrete Institute (ACI) [169].

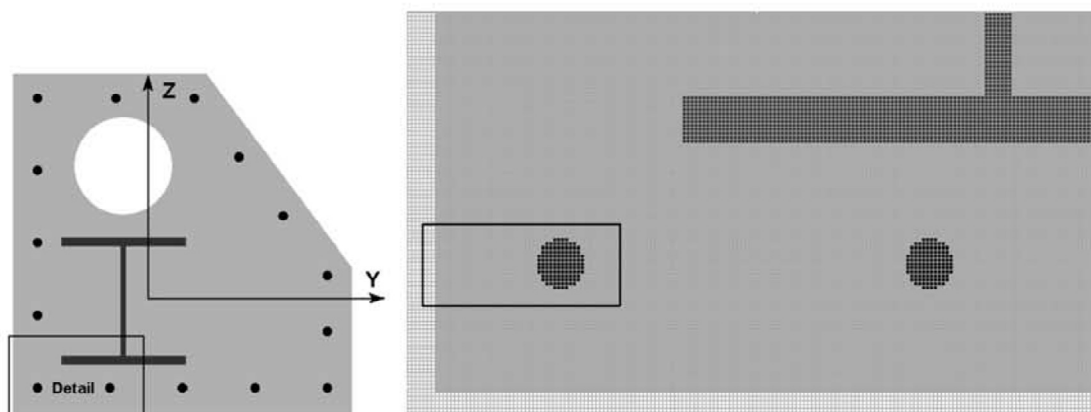
Στα πλεονεκτήματα της μεθόδου περιλαμβάνεται η ιδιαίτερα αποδοτική ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων. Σημειώνεται όμως ότι η ολοκλήρωση αφορά την περίμετρο του θλιβόμενου σκυροδέματος, η οποία εξαρτάται από την τρέχουσα παραμορφωμένη

κατάσταση της διατομής. Έτσι, πριν από κάθε ολοκλήρωση θα πρέπει να καθορίζεται εκ νέου η περίμετρος του θλιβόμενου σκυροδέματος, κάτι το οποίο αυξάνει τον υπολογιστικό φόρτο. Επιπλέον σημειώνεται ότι η μέθοδος εφαρμόζεται σε αυστηρά πολυγωνικές διατομές ενώ δεν αντιμετωπίζονται περιπτώσεις εγκιβωτισμένων διατομών δομικού χάλυβα ή πολλαπλών επιπέδων περισφιγμένου σκυροδέματος. Ο διαμήκης οπλισμός θεωρείται ότι αποτελείται από αδιάστατες ίνες (σημεία) με συγκεκριμένο εμβαδόν. Για να αντιμετωπιστεί το θέμα του εμβαδού του διαμήκου οπλισμού που λαμβάνεται υπόψη ως επιφάνεια σκυροδέματος, η αντίστοιχη δύναμη  $A_s f_c$  αφαιρείται κατά των υπολογισμό των συνισταμένων δυνάμεων που δρουν στην διατομή.

#### **6.5.5 Sfakianakis (2002)**

Ο Sfakianakis [159] παρουσίασε μια ιδιαίτερη μέθοδο η οποία χρησιμοποιεί τα γραφικά των Η/Υ ως υπολογιστικό εργαλείο. Η διατομή σχεδιάζεται στην οθόνη ή στην μνήμη του Η/Υ και η αναγνώριση των διαφόρων υλικών από τα οποία αποτελείται γίνεται με βάση το χρώμα των εικονοστοιχείων (pixels). Συνεπώς υπάρχει πλήρης ελευθερία στην χρήση μη κανονικών διατομών, εγκιβωτισμένων διατομών δομικού χάλυβα, οπών, πολλαπλών στρώσεων σκυροδέματος με διαφορετικά επίπεδα περισφιγξης κ.λ.π.

Η σχεδίαση στην μνήμη του Η/Υ μπορεί να γίνει με βάση ρουτίνες που παρέχουν τα σύγχρονα λειτουργικά συστήματα με γραφικό περιβάλλον, όπως το Windows Application Programming Interface (API) των Microsoft Windows®. Καθορίζεται ένα πλέγμα (grid) εικονοστοιχείων συγκεκριμένων διαστάσεων το οποίο αποτελεί ένα «καμβά». Επίσης καθορίζονται γραφικά αντικείμενα όπως «μολύβι», «πινέλο» κ.α. με διάφορα χρώματα και πάχη γραμμής. Η σχεδίαση πραγματοποιείται με επιλογή του κατάλληλου γραφικού αντικειμένου στον «καμβά» και εφαρμογή μεθόδων όπως «σχεδίαση γραμμής από σημείο X1, Y1 σε σημείο X2, Y2» ή «σχεδίαση κύκλου με κέντρο X1, Y1 και ακτίνα D1». Με αυτό τον τρόπο είναι δυνατή η σχεδίαση τυχαίων διατομών (Εικόνα 6.5.4).

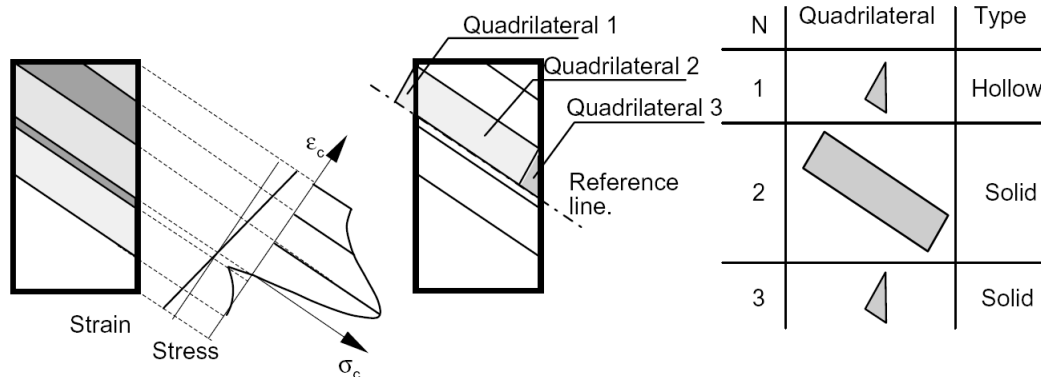


Εικόνα 6.5.4: Σχεδίαση τυχαίας διατομής κατά Sfakianakis [159]

Το κύριο μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι οι διαστάσεις του πλέγματος που απαιτούνται για να επιτευχθεί κάποια συγκεκριμένη ακρίβεια δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων. Επιπλέον, τα εικονοστοιχεία έχουν τετράγωνη μορφή η οποία δεν μπορεί να προσομοιάσει επαρκώς καμπύλες γραμμές. Αυτό το μειονέκτημα μπορεί να αντισταθμιστεί σε κάποιο βαθμό, με χρήση κατάλληλα διορθωμένου εμβαδού για τα τετραγωνικά εικονοστοιχεία που αναπαριστούν τον διαμήκη οπλισμό. Επιπλέον, στον αλγόριθμο γίνεται εκ των προτέρων η υπόθεση ότι η αστοχία της διατομής οφείλεται στο σκυρόδεμα, το οποίο φτάνει την μέγιστη επιτρεπόμενη θλιπτική παραμόρφωση  $\varepsilon_{cu}$ . Με αυτόν τον τρόπο επιταχύνεται η εύρεση της μέγιστης αντοχής της διατομής. Η υπόθεση αυτή συνήθως επαληθεύεται σε κανονικά οπλισμένες διατομές, όμως υποβαθμίζει την γενικότητα του αλγορίθμου. Επιπλέον, δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός των ενδιάμεσων παραμορφωμένων καταστάσεων, δηλαδή του διαγράμματος ροπών – καμπυλοτήτων.

#### 6.5.6 Bonet et al. (2004)

Οι Bonet et al. [146] παρουσίασαν έναν αλγόριθμο ολοκλήρωσης του πεδίου των τάσεων που βασίζεται στην κατάτμηση της διατομής σε στρώσεις (thick layers). Οι στρώσεις είναι τετράπλευρα τα οποία στην συνέχεια αναλύονται κατά ισοδύναμο τρόπο σε άλλα πλήρη ή κενά ορθογώνια παραλληλόγραμμα ή τρίγωνα (Εικόνα 6.5.5).



**Εικόνα 6.5.5: Ανάλυση διατομής σε στρώσεις κατά Bonet et al. [146]**

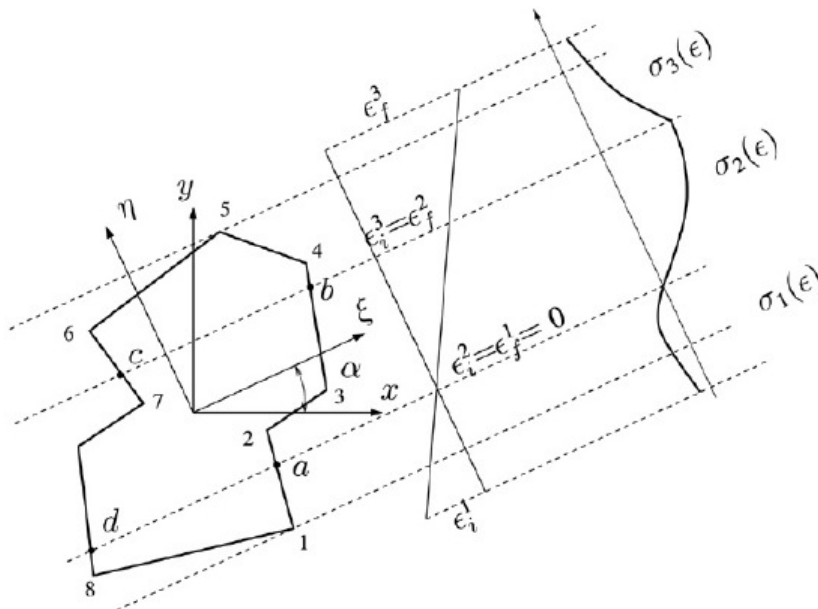
Γίνεται διάκριση μεταξύ δύο ειδών πεδίων τάσεων: το κυλινδρικό πεδίο, στο οποίο η τάση είναι ομοιόμορφη κατά μια διεύθυνση, καθώς και το μη κυλινδρικό. Σε κάθε περίπτωση, η μέθοδος εφαρμόζεται σε αυστηρά πολυγωνικές διατομές. Για την ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων γίνεται χρήση της αριθμητικής μεθόδου Gauss-Legendre. Έτσι, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων εξαρτάται από το πλήθος των σημείων Gauss που λαμβάνονται υπόψη στους υπολογισμούς. Τέλος, έγινε σύγκριση της απόδοσης των αλγορίθμων σε σχέση με την μέθοδο του Fafitis [153].

### 6.5.7 Zupan και Saje (2005)

Οι Zupan και Saje [161] χρησιμοποίησαν το θεώρημα του Green [166] για την ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων μιας πολυγωνικής διατομής. Χρησιμοποίησαν συγκεκριμένες αναλυτικές εκφράσεις για τα διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων των υλικών. Στην συνέχεια, συνέκριναν την απόδοση του αλγορίθμου με χρήση τόσο αναλυτικών όσο και αριθμητικών μεθόδων ολοκλήρωσης του πεδίου των τάσεων. Το συμπέρασμα της σύγκρισης αυτής είναι ότι, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, *επαρκώς ακριβείς αριθμητικές μέθοδοι μπορεί να απαιτούν ως τρεις φορές περισσότερους υπολογισμούς σε σχέση με αναλυτικές μεθόδους*. Επιπλέον, αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης χαμηλού βαθμού μπορεί να δώσουν αποτελέσματα με ανεπιτρεπτα μεγάλο σφάλμα.

### 6.5.8 Sousa και Muniz (2007)

Οι Sousa και Muniz [162] επίσης παρουσίασαν μια μέθοδο η οποία χρησιμοποιεί το θεώρημα του Green [166]. Η μεθοδός τους εφαρμόζεται σε πολυγωνικές διατομές και χρησιμοποιεί πολλαπλές πολυωνυμικές εκφράσεις για την σχέση τάσης – παραμόρφωσης των υλικών (Εικόνα 6.5.6).



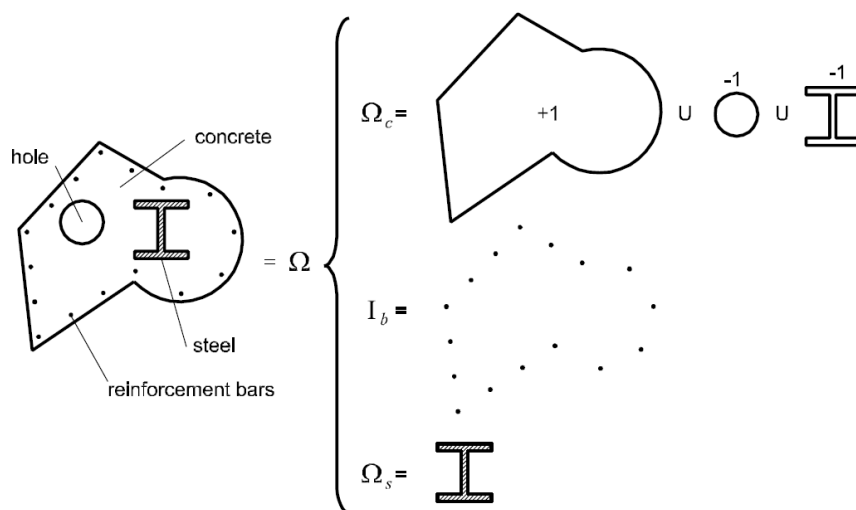
Εικόνα 6.5.6: Ανάλυση διατομής κατά Sousa και Muniz [162]

Η εν λόγω μέθοδος εφαρμόζεται σε αυστηρά πολυγωνικές διατομές ενώ γίνεται η θεώρηση ότι ο διαμήκης οπλισμός αποτελείται από αδιάστατες ίνες (σημεία).

### 6.5.9 Rosati et al. (2008)

Οι Rosati et al. [165], βασιζόμενοι σε παλαιότερη εργασία των De Vivo και Rosati [164], παρουσίασαν μια ομάδα αλγορίθμων για τον υπολογισμό της μέγιστης αντοχής τυχαίων πολυγωνικών ή κυκλικών διατομών οπλισμένου σκυροδέματος, οι οποίες υπόκεινται σε διαξονική κάμψη και αξονική δύναμη. Οι αλγόριθμοι βασίζονται σε μεθόδους τέμνουσας (secant methods) για τον υπολογισμό του μητρώου δυσκαμψίας που χρησιμοποιείται στην

επαναληπτική μέθοδο για την επίτευξη ισορροπίας. Η διατομή αναλύεται σε επιμέρους χωρία τα οποία λαμβάνονται υπόψη με θετικό ή αρνητικό πρόσημο (Εικόνα 6.5.7).



Εικόνα 6.5.7: Ανάλυση διατομής κατά Rosati et al. [165]

Στην εν λόγω μέθοδο, το διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων του θλιβόμενου σκυροδέματος αποτελείται από μια παραβολή και μια οριζόντια ευθεία γραμμή ενώ ο χάλυβας θεωρείται ότι ακολουθεί ελαστική – απολύτως πλαστική συμπεριφορά.

### 6.5.10 Επιπλέον αναφορές

Στην βιβλιογραφία υπάρχει ένα πλήθος παλαιότερων ή νεώτερων άρθρων που συνδυάζουν ή υλοποιούν κάποιες από τις μεθόδους που προαναφέρθηκαν. Στην συνέχεια, παρατίθενται εν συντομία τα βασικά χαρακτηριστικά των άρθρων αυτών.

Ο Rotter (1985) [158] επικεντρώθηκε στην κατασκευή διαγραμμάτων ροπών – καμπυλοτήτων εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green [166].

Οι Kwan και Liauw (1985) [154] ανέλυσαν τυχαίες διατομές με χρήση του θεωρήματος του Green [166] και συγκεκριμένες ιδιότητες υλικών. Υλοποίησαν μια επαναληπτική μέθοδο για να καθορίσουν την παραμορφωμένη κατάσταση της διατομής που βρίσκεται σε



ισορροπία με τα εξωτερικά φορτία. Ενδεχόμενες οπές στην διατομή αντιμετωπίστηκαν με φανταστικές τομές που ενώνουν το εξωτερικό περίγραμμα με τα εσωτερικά περιγράμματα των οπών.

Οι Tsao και Hsu (1993) [160] ανέλυσαν υποστυλώματα μορφής «L» σε διαξονική κάμψη με ταυτόχρονη αξονική δύναμη. Χρησιμοποίησαν την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για να υπολογίσουν τις μετατοπίσεις που ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας. Επίσης, πραγματοποίησαν μια σειρά πειραμάτων και βρήκαν ικανοποιητική συμφωνία με τις θεωρητικές αναλύσεις σε μονοτονική φόρτιση.

Οι Dundar και Sahin (1993) [152] επίσης χρησιμοποίησαν το θεώρημα του Green [166] και την μέθοδο Newton-Raphson για να επιτύχουν σύγκλιση.

Ο Parche (2000) [173] εφάρμοσε πλήρη διακριτοποίηση της διατομής σε ίνες και εφάρμοσε μονοαξονικές σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων σε κάθε μία από αυτές. Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσίασαν καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα τόσο σε μονοτονική όσο και σε ανακυκλιζόμενη φόρτιση.

Όμοια, οι Kim και Lee (2000) [174] προχώρησαν σε πλήρη διακριτοποίηση της διατομής σε ίνες. Επιπλέον, προχώρησαν σε διεξαγωγή πειραμάτων με 16 δοκίμια τετραγωνικής και ορθογωνικής διατομής. Η διαξονική κάμψη επιτεύχθηκε με έκκεντρη αξονική φόρτιση των δοκιμίων. Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσίασαν καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα.

Οι Bonet et al. (2006) [163] παρουσίασαν μια μέθοδο υπολογισμού διαγραμμάτων αλληλεπίδρασης ορθογωνικών και κυκλικών διατομών οπλισμένου σκυροδέματος. Επιπλέον, συνέκριναν την απόδοση του αλγορίθμου με χρήση τόσο αναλυτικών όσο και αριθμητικών μεθόδων ολοκλήρωσης.

## **6.6 Μειονεκτήματα υφιστάμενων μεθόδων**

Συνολικά, οι υφιστάμενες μέθοδοι παρουσιάζουν συγκεκριμένα μειονεκτήματα τα οποία συνοψίζονται ως εξής:

- Σχεδόν όλοι οι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν μια συγκεκριμένη μορφή διαγραμμάτων τάσης – παραμόρφωσης των υλικών.
- Σχεδόν όλοι οι αλγόριθμοι έχουν εφαρμογή σε πολυγωνικές διατομές. Λίγες μέθοδοι αντιμετωπίζουν κυκλικές διατομές με αναλυτικές σχέσεις [149], [163].
- Πολλοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούν το θεώρημα του Green [166] για την μετατροπή των επιφανειακών ολοκληρωμάτων σε επικαμπύλια, π.χ. [158], [153], [161], [162]. Αν και η μέθοδος είναι γρήγορη, οι διάφορες υποπεριοχές της διατομής, όπως για παράδειγμα η μη ρηγματωμένη περιοχή του σκυροδέματος πρέπει να υπολογίζονται εκ νέου πριν από κάθε ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων.
- Κάποιοι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης του πεδίου των τάσεων για τις οποίες απαιτείται έλεγχος της ακρίβειας των αποτελεσμάτων. Μελέτες υποδεικνύουν ότι επαρκώς ακριβείς αριθμητικές μέθοδοι μπορεί να είναι τρεις φορές πιο αργές σε σχέση με αναλυτικές μεθόδους, ενώ ένας χαμηλός βαθμός αριθμητικής ολοκλήρωσης μπορεί να δώσει ανεπίτρεπτα μεγάλα λάθη [161]. Το σημαντικότερο όμως είναι ότι *ο απαιτούμενος βαθμός αριθμητικής ολοκλήρωσης για να επιτευχθεί ένα δεδομένο επίπεδο ακρίβειας δεν είναι γνωστός εκ των προτέρων*.
- Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι ράβδοι του διαμήκους οπλισμού αντιμετωπίζονται ως μεμονωμένες αδιάστατες ίνες και συνεπώς το εμβαδόν τους θεωρείται ότι καταλαμβάνεται από σκυρόδεμα. Το ίδιο πρόβλημα παρουσιάζεται και στην περίπτωση εγκιβωτισμένων διατομών χάλυβα.
- Μερικοί αλγόριθμοι είναι ευαίσθητοι στην επιλογή της αρχής των αξόνων και μπορεί να μην συγκλίνουν, ιδιαίτερα στην περίπτωση μεγάλων θλιπτικών φορτίων [147], [172].

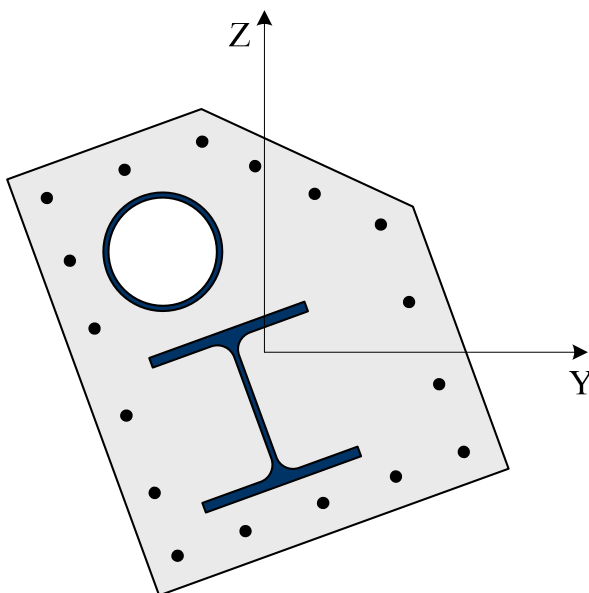
Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αναπτύχθηκε μια νέα μέθοδος η οποία αντιμετωπίζει κατά ενιαίο τρόπο όλα τα προαναφερθέντα θέματα. Η μέθοδος χρησιμοποιεί ακριβή αναπαράσταση τυχαίων διατομών με ευθείες ή καμπύλες ακμές ενώ η ολοκλήρωση του

πεδίου των τάσεων γίνεται με αναλυτικό τρόπο. Τέλος, η υλοποίηση έγινε σε ένα πλήρως γραφικό περιβάλλον με έμφαση στην σταθερότητα και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

## 6.7 Προτεινόμενη νέα μέθοδος

### 6.7.1 Περιγραφή του προβλήματος

Θεωρούμε ένα πρισματικό μέλος του οποίου η συμπεριφορά είναι συμβατή με την υπόθεση Bernoulli-Euler, σύμφωνα με την οποία οι διατομές παραμένουν επίπεδες μετά την παραμόρφωση. Συνεπώς, θεωρείται ότι δεν υπάρχει σχετική ολίσθηση μεταξύ των διαφόρων υλικών. Η διατομή του μέλους έχει τυχαία μορφή και μπορεί να αποτελείται από διάφορα υλικά, διαμήκη οπλισμό, εγκιβωτισμένες διατομές χάλυβα, οπές κ.λ.π. (Εικόνα 6.7.1). Επιπλέον, μπορούν να καθοριστούν και περιοχές σκυροδέματος με διαφορετικά επίπεδα περίσφιξης.



Εικόνα 6.7.1: Τυχαία διατομή υπό εξέταση

Τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται από την προτεινόμενη μέθοδο είναι:

- 1) Ο υπολογισμός του πλήρους διαγράμματος ροπών – καμπυλοτήτων,
- 2) Ο υπολογισμός της μέγιστης αντοχής της διατομής, ο οποίος περιλαμβάνει την κατασκευή τόσο διαγραμμάτων αλληλεπίδρασης όσο και επιφανειών αστοχίας,
- 3) Ο καθορισμός της παραμορφωμένης κατάστασης της διατομής υπό δεδομένα εξωτερικά φορτία.

### **6.7.2 Μέγιστη αντοχή**

Από φυσικής άποψης, η *μέγιστη αντοχή* μιας διατομής επιτυγχάνεται όταν επιπλέον επιβαλλόμενη παραμόρφωση οδηγεί σε μειωμένη απόκριση. Η *επιφάνεια αστοχίας* μιας διατομής μπορεί να οριστεί ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του τρισδιάστατου χώρου των συνισταμένων δυνάμεων που αντιστοιχούν σε μέγιστη αντοχή [159]. Η επιφάνεια αστοχίας είναι μια κλειστή επιφάνεια η οποία εξαρτάται από την γεωμετρία της διατομής και τα διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων των υλικών [164]. Συνεπώς, δεν μπορεί να περιγραφεί από αναλυτικές σχέσεις (παρά μόνο προσεγγιστικά, π.χ. [171]) και θα πρέπει να κατασκευαστεί σημείο προς σημείο.

Πέραν της επιφάνειας αστοχίας, μπορεί να οριστεί και η *συμβατική επιφάνεια αστοχίας*. Γενικά, η επιφάνεια αυτή έχει την ίδια μορφή με την επιφάνεια αστοχίας αλλά είναι μικρότερη σε μέγεθος [159] και κατασκευάζεται με υπολογισμό σημείων που αντιστοιχούν σε *συμβατική μέγιστη αντοχή*. Σε αυτή την περίπτωση, η *συμβατική αστοχία* επιτυγχάνεται όταν κάποιο από τα υλικά της διατομής φτάσει κάποια προκαθορισμένη μέγιστη θλιπτική ή εφελκυστική παραμόρφωση.

Οι προαναφερθείσες επιφάνειες αστοχίας χρησιμοποιούνται συχνά χωρίς διάκριση και οι περισσότεροι αλγόριθμοι υπολογίζουν την συμβατική επιφάνεια αστοχίας. Επιπλέον, σε μερικούς αλγορίθμους γίνεται εκ των προτέρων η υπόθεση ότι η αστοχία οφείλεται στο θλιβόμενο σκυρόδεμα, το οποίο φτάνει μια προκαθορισμένη τιμή παραμόρφωσης  $\varepsilon_{cu}$  [149], [159]. Είναι όμως σαφές ότι η συμβατική αστοχία της διατομής μπορεί να συμβεί και λόγω του χάλυβα του διαμήκους οπλισμού. Εξ' άλλου, η μέγιστη αντοχή μιας διατομής είναι

δυνατόν να επιτευχθεί *πριν* την συμβατική αστοχία και όχι το αντίστροφο. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν κάποιος θεωρήσει διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων με έντονη παραμορφωσιακή χαλάρωση, όπως στην περίπτωση μη περισφιγμένου σκυροδέματος ή διαμήκους οπλισμού που είναι επιρρεπής σε λυγισμό λόγω ανεπαρκών συνδετήρων. Γενικά πάντως, η συμβατική αστοχία συμβαίνει πριν την επίτευξη της μέγιστης αντοχής της διατομής όταν χρησιμοποιούνται τα συνήθη διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων που υποδεικνύουν οι κανονισμοί όπως ο Ευρωκώδικας 2 [168] ή ο ACI [169].

Σε κάθε περίπτωση πάντως, η προτεινόμενη μέθοδος υπολογίζει την μέγιστη αντοχή με βάση τα πλήρη διαγράμματα ροπών – καμπυλοτήτων. Έτσι, ως μέγιστη αντοχή λαμβάνεται η *δυσμενέστερη* εκ της συμβατικής και πραγματικής μέγιστης αντοχής, ενώ με χρήση εξειδικευμένων τεχνικών επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού κόστους.

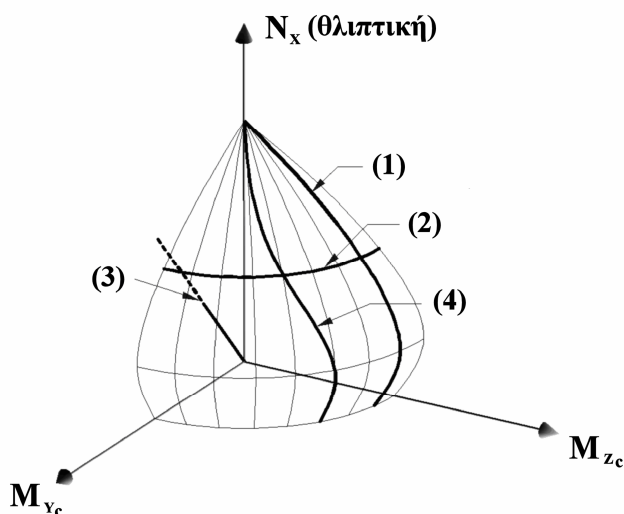
### 6.7.3 Μέθοδοι υπολογισμού της επιφάνειας αστοχίας

Στην πράξη, η επιφάνεια αστοχίας μια διατομής μπορεί να κατασκευαστεί με τέσσερις κύριες μεθόδους:

- 1) Με πολλαπλά διαγράμματα αλληλεπίδρασης για δεδομένο λόγο καμπτικών ροπών  $M_y/M_z$ ,
- 2) Με πολλαπλά διαγράμματα αλληλεπίδρασης για δεδομένο αξονικό φορτίο  $N_x$ ,
- 3) Με πολλαπλά σημεία που προκύπτουν με επέκταση τυχαίων ευθειών στον τρισδιάστατο χώρο των συνισταμένων δυνάμεων,
- 4) Με πολλαπλές ισογωνικές τρισδιάστατες καμπύλες που προκύπτουν για δεδομένη διεύθυνση ουδέτερου άξονα  $\theta$ .

Οι παραπάνω μέθοδοι παρουσιάζονται γραφικά στην Εικόνα 6.7.2. Στις πρώτες δύο περιπτώσεις, η ακριβής θέση του ουδέτερου άξονα καθορίζεται από δύο παραμέτρους, για παράδειγμα από την διεύθυνση του ουδέτερου άξονα  $\theta$  και το βάθος της θλιβόμενης ζώνης  $d_n$ . Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν τρεις συζευγμένες μη γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας,

για την επίλυση των οποίων απαιτείται μια επαναληπτική διαδικασία, όπως για παράδειγμα η οιοική – Νευτώνεια μέθοδος που προτάθηκε από τον Yen [172]. Τέτοιου τύπου αλγόριθμοι δεν είναι εύκολα υλοποιήσιμοι και, σε μερικές περιπτώσεις, είναι ευαίσθητοι στην επιλογή του σημείου της αρχής των αξόνων αναφοράς. Ως αποτέλεσμα, ενδέχεται να παρουσιάσουν αστάθειες στην περίπτωση μεγάλων θλιπτικών αξονικών φορτίων [149]. Εξ' άλλου, η τρίτη μέθοδος χρησιμοποιεί επαναληπτικές μεθόδους τύπου τέμνουσας (secant methods) για την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας [164].



Εικόνα 6.7.2: Μέθοδοι υπολογισμού της επιφάνειας αστοχίας

Από την άλλη πλευρά, η τέταρτη μέθοδος των ισογωνικών καμπύλων, η οποία χρησιμοποιείται στον προτεινόμενο αλγόριθμο, είναι πιο άμεση και σταθερή. Ο λόγος είναι ότι μία εκ των παραμέτρων που καθορίζουν την παραμορφωμένη κατάσταση της διατομής, ήτοι η διεύθυνση του ουδέτερου άξονα, επιλέγεται εξ' αρχής από τον αλγόριθμο και παραμένει σταθερή καθ' όλη την διαδικασία κατασκευής του διαγράμματος ροπών – καμπυλοτήτων. Ως συνέπεια της μείωσης των παραμέτρων, απαιτείται η ύπαρξη μιας δευτερεύουσας καμπτικής ροπής ώστε να προκύψει η δεδομένη παραμορφωμένη κατάσταση της διατομής. Με την εξαίρεση ειδικών περιπτώσεων συμμετρικών διατομών, αυτή η δευτερεύουσα καμπτική ροπή είναι μη μηδενική. Έτσι, τα σημεία στην επιφάνεια αστοχίας

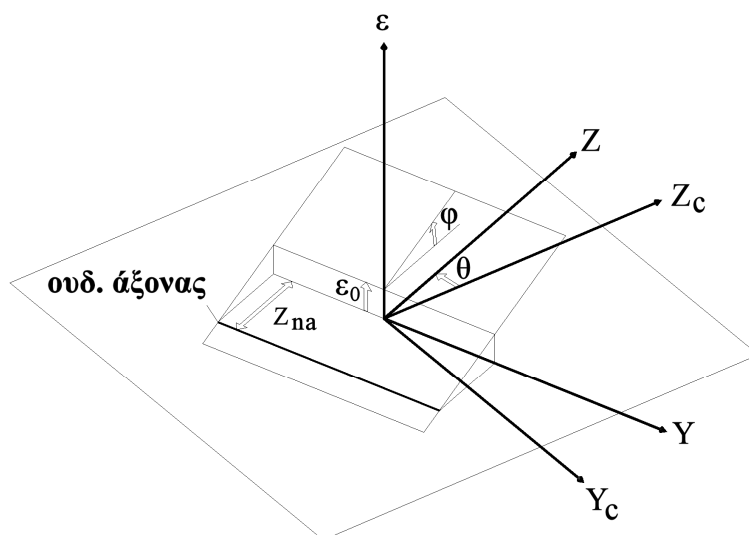
ακολουθούν μια τρισδιάστατη καμπύλη γραμμή που δεν ανήκει σε κάποιο επίπεδο (Εικόνα 6.7.2).

#### 6.7.4 Παραμορφωμένη κατάσταση

Για την ανάλυση μιας τυχαίας διατομής σε δεδομένη παραμορφωμένη κατάσταση απαιτείται να είναι γνωστό το πεδίο των παραμορφώσεων. Για τις περισσότερες περιπτώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος, η υπόθεση Bernoulli – Euler είναι αποδεκτή [164]. Απαιτούνται τρεις παράμετροι για τον καθορισμό του επιπέδου της παραμορφωμένης διατομής και, συνεπώς, το πεδίο των παραμορφώσεων μπορεί να περιγραφεί από σημεία σε έναν τρισδιάστατο χώρο. Με εφαρμογή των νόμων τάσεων – παραμορφώσεων των διαφόρων υλικών, το πεδίο των παραμορφώσεων μετασχηματίζεται στο αντίστοιχο πεδίο τάσεων. Με ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων πάνω στην επιφάνεια της διατομής προκύπτουν οι συνιστάμενες δυνάμεις  $(N_x, M_{yc}, M_{zc})$ .

Στην προτεινόμενη μέθοδο, οι τρεις παράμετροι που καθορίζουν το επίπεδο της παραμορφωμένης διατομής είναι οι εξής (Εικόνα 6.7.3):

- 1) Η διεύθυνση του ουδέτερου άξονα  $\theta$ ,
- 2) Η καμπυλότητα  $\varphi$ ,
- 3) Η παραμόρφωση  $\varepsilon_0$  που αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων.



Εικόνα 6.7.3: Καθορισμός παραμορφωμένης κατάστασης

Σημειώνεται ότι η καμπυλότητα  $\varphi$  ορίζεται με μονάδες μήκους<sup>-1</sup> ενώ η διεύθυνση του ουδέτερου άξονα  $\theta$  ορίζεται ως γωνία. Επιπλέον, θεωρείται ότι ο άξονας  $X$  είναι παράλληλος με τον διαμήκη άξονα του μέλους, ενώ οι άξονες  $Y_c$  και  $Z_c$  καθορίζουν το επίπεδο της διατομής. Ως αρχή των αξόνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε σημείο.

Στην προτεινόμενη μέθοδο, η διεύθυνση του ουδέτερου άξονα παραμένει σταθερή καθ' όλη την κατασκευή του διαγράμματος ροπών – καμπυλοτήτων. Συνεπώς, διευκολύνει ιδιαίτερα η έκφραση όλων των συντεταγμένων σε ένα νέο σύστημα αναφοράς  $XYZ$ , το οποίο προκύπτει με περιστροφή του  $XY_cZ_c$  κατά  $\theta$ . Η περιστροφή πραγματοποιείται αντίστροφα από την φορά των δεικτών του ρολογιού. Έτσι, οι συντεταγμένες στο νέο σύστημα αναφοράς προκύπτουν με βάση την παρακάτω σχέση:

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (6.7.1)$$

Με αυτόν τον τρόπο, η παραμόρφωση σε κάποιο σημείο της διατομής είναι συνάρτηση μόνο της συντεταγμένης  $z$ :

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \varphi z \quad (6.7.2)$$



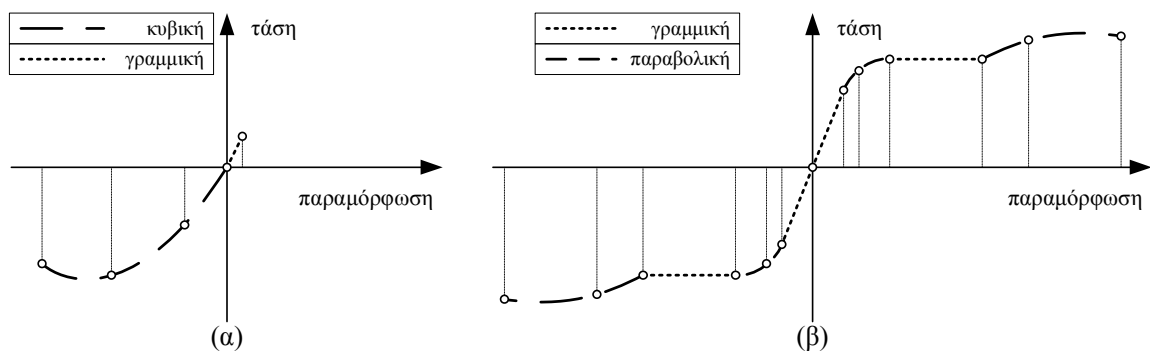
Έτσι, για δεδομένη καμπυλότητα  $\varphi \neq 0$  και παραμόρφωση  $\varepsilon_0$ , ο ουδέτερος άξονας είναι παράλληλος στον άξονα  $Y$  και έχει εξίσωση:

$$z_{na} = -\varepsilon_0 / \varphi \quad (6.7.3)$$

### 6.7.5 Ιδιότητες των υλικών

Στην προτεινόμενη μέθοδο, οι νόμοι τάσης – παραμόρφωσης των υλικών αποτελούνται από οποιοδήποτε πλήθος και συνδυασμό συνεχόμενων τμημάτων. Κάθε τμήμα περιγράφεται από κάποιο πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Η χρήση κυβικών πολυωνύμων δεν είναι δεσμευτική, όμως είναι επαρκής για κάθε πρακτική εφαρμογή. Η χρήση πολυωνύμων μεγαλύτερου βαθμού συνεπάγεται μεγαλύτερη πολυπλοκότητα στις αναλυτικές εκφράσεις ολοκλήρωσης του πεδίου των τάσεων.

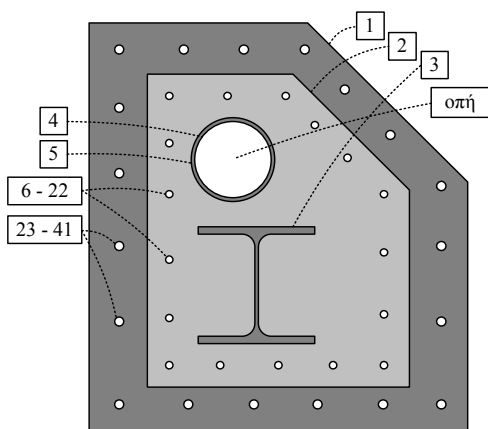
Σε αλγοριθμικό επίπεδο, κάθε πολυωνυμικό τμήμα του διαγράμματος τάσεων – παραμορφώσεων καθορίζεται με προσαρμογή κατάλληλου πλήθους συνεχόμενων σημείων, όπως για παράδειγμα στην Εικόνα 6.7.4α όπου ένα κυβικό πολυώνυμο προκύπτει αυτόματα με βάση τέσσερα συνεχόμενα δοθέντα σημεία.



Εικόνα 6.7.4: Παράδειγμα σχέσης τάσης – παραμόρφωσης (α) σκυροδέματος (β) χάλυβα

### 6.7.6 Περιγραφή τυχαίας διατομής

Η διατομή μπορεί να αποτελείται από διάφορα υλικά, διαμήκη οπλισμό, εγκιβωτισμένες διατομές χάλυβα, οπές κ.λ.π. Για την περιγραφή της διατομής χρησιμοποιείται μόνον ένα γραφικό αντικείμενο, ήτοι το *καμπυλόγραμμο πολύγωνο*. Το καμπυλόγραμμο πολύγωνο είναι ένα πολύγωνο του οποίου οι ακμές μπορεί να είναι ευθείες γραμμές ή τόξα κύκλου ή οποιοσδήποτε συνδυασμός αυτών. Τα καμπυλόγραμμο πολύγωνα (στο εξής απλά *πολύγωνα*) μπορεί να είναι κυρτά ή μη κυρτά, αλλά για τις ανάγκες της παρούσας διατριβής υποθέτουμε ότι αποτελούν απλά χωρία, δηλαδή οι ακμές τους δεν τέμνονται σε σημεία εκτός των κορυφών τους ενώ κάθε κορυφή ανήκει σε ακριβώς δύο ακμές. Οι κύκλοι αντιμετωπίζονται ως πολύγωνα με δύο κορυφές και δύο ημικυκλικές ακμές. Σημειώνεται ότι ακόμη και μικρά σε μέγεθος χωρία, όπως είναι τυπικά οι διατομές του διαμήκους οπλισμού, αντιμετωπίζονται ως πλήρη γραφικά αντικείμενα και όχι ως αδιάστατες ίνες.



Αντικείμενα	Πλήθος κόμβων	«Προστιθέμενο» υλικό	«Αφαιρούμενο» υλικό
1	5	Μη περισφιγμένο (εξ.) σκυρόδεμα	Κανένα
2	5	Περισφιγμένο (εσ.) σκυρόδεμα	Μη περισφιγμένο (εξ.) σκυρόδεμα
3	16	Διατομή χάλυβα HEB	Περισφιγμένο (εσ.) σκυρόδεμα
4	2	Κανένα (οπή)	Διατομή χάλυβα RHS
5	2	Διατομή χάλυβα RHS	Περισφιγμένο (εσ.) σκυρόδεμα
6 - 22	2	Διαμήκης οπλισμός	Περισφιγμένο (εσ.) σκυρόδεμα
23 - 41	2	Διαμήκης οπλισμός	Μη περισφιγμένο (εξ.) σκυρόδεμα

Εικόνα 6.7.5: Παράδειγμα ιεραρχικής ανάλυσης πολυγώνων τυχαίας διατομής

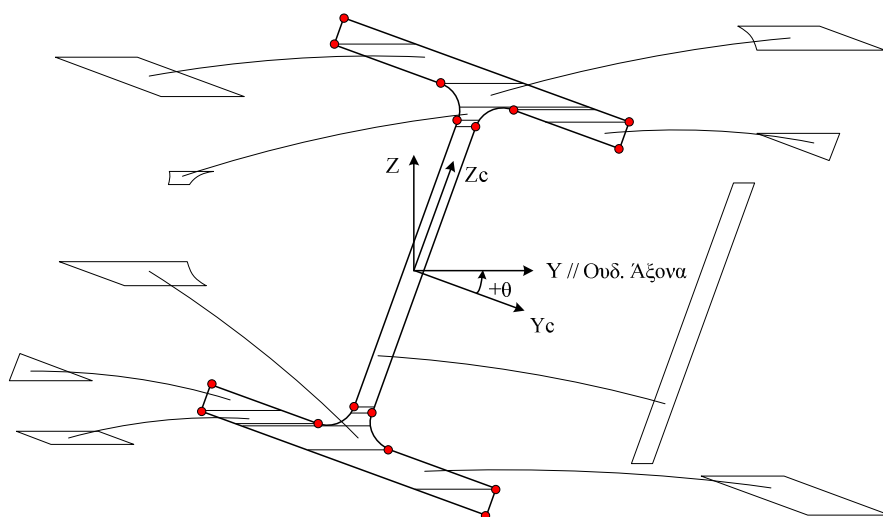
Για να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος, κάθε πολύγωνο αντιμετωπίζεται ανεξάρτητα. Η ανάλυση γίνεται ιεραρχικά, με σειρά από το εξωτερικό πολύγωνο προς το εσωτερικό. Σε κάθε πολύγωνο αντιστοιχούν δύο υλικά, ήτοι το «προστιθέμενο» υλικό το οποίο βρίσκεται

στο προσκήνιο και το «αφαιρούμενο» υλικό το οποίο βρίσκεται στο παρασκήνιο. Κατά την ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων το «προστιθέμενο» υλικό λαμβάνεται υπόψη με θετικό πρόσημο ενώ το «αφαιρούμενο» υλικό λαμβάνεται υπόψη με αρνητικό πρόσημο. Αυτή η μεθοδολογία μειώνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος, σε αντίθεση με την χρήση «φανταστικών τομών» που ενώνουν τα εξωτερικά πολύγωνα (τα οποία διατρέχονται κατά μια φορά) με τα εσωτερικά πολύγωνα (τα οποία διατρέχονται κατά την αντίθετη φορά), όπως για παράδειγμα στην εργασία του Fafitis [153]. Με την προτεινόμενη μέθοδο, μπορεί να περιγραφεί επακριβώς πρακτικά οποιαδήποτε διατομή, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.7.5.

### **6.7.7 Κατάτμηση πολυγώνων σε καμπυλόγραμμα τραπέζια**

Η επόμενη φάση της ανάλυσης είναι γεωμετρικής φύσης και αφορά την κατάτμηση των πολυγώνων σε *καμπυλόγραμμα τραπέζια*. Η «άνω» και «κάτω» ακμή των καμπυλόγραμμων τραπεζίων (στο εξής απλά *τραπεζίων*) είναι ευθείες γραμμές παράλληλες με τον άξονα  $Y$  (και συνεπώς παράλληλες και με τον ουδέτερο άξονα) ενώ η «δεξιά» και «αριστερή» ακμή μπορεί να είναι ευθείες γραμμές ή τόξα κύκλου. Κάθε πολύγωνο αναλύεται πλήρως σε τραπέζια με χρήση ενός αλγορίθμου τύπου διαιρεί-και-βασιλεύει (*divide-and-conquer*). Το πολύγωνο χωρίζεται σε δύο τμήματα από μια ευθεία γραμμή παράλληλη με τον άξονα  $Y$  που διέρχεται από κάποια κορυφή. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται σε κάθε προκύπτον πολύγωνο, έως ότου όλα να μετατραπούν σε τραπέζια. Αυτή η διαδικασία απαιτείται να εφαρμοστεί μόνο μια φορά για κάθε επιλεγμένη διεύθυνση του ουδέτερου άξονα  $\theta$ .

Στην Εικόνα 6.7.6 φαίνεται ένα παράδειγμα κατάτμησης μιας διατομής χάλυβα καθώς και μερικά από τα προκύπτοντα τραπέζια. Σημειώνεται ότι η διατομή του χάλυβα περιγράφεται *επακριβώς* με χρήση ενός καμπυλόγραμμου 16-γώνου.



Εικόνα 6.7.6: Παράδειγμα κατάτμησης διατομής χάλυβα σε καμπυλόγραμμα τραπέζιο

### 6.7.8 Βασικά επιφανειακά ολοκληρώματα

Για κάθε τραπέζιο υπολογίζεται μια σειρά από βασικά επιφανειακά ολοκληρώματα. Τα ολοκληρώματα είναι της μορφής  $y^m z^n$  όπου  $m, n$  είναι συγκεκριμένοι φυσικοί αριθμοί, ως εξής:

$$I_{(m,n)}^j = \iint_{\text{τραπέζιο } j} (y^m z^n) dydz \quad (6.7.4)$$

Η ολοκλήρωση γίνεται με χρήση αναλυτικών σχέσεων οι οποίες παρατίθενται στο Παράρτημα D. Οι σχέσεις είναι απλές στην περίπτωση που οι πλαϊνές ακμές είναι ευθείες γραμμές και γίνονται πολύπλοκες μόνον όταν αυτές είναι τόξα κύκλου. Τα ολοκληρώματα απαιτείται να υπολογιστούν μόνον μια φορά, καθώς είναι ανεξάρτητα της παραμορφωμένης κατάστασης της διατομής. Αυτό επιτρέπει την πολύ γρήγορη ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων για μεταβαλλόμενες τιμές της καμπυλότητας  $\varphi$  και της παραμόρφωσης  $\varepsilon_0$ , όπως περιγράφεται στην συνέχεια.

### 6.7.9 Υπολογισμός συνισταμένων δυνάμεων

Ο υπολογισμός των συνισταμένων δυνάμεων πραγματοποιείται με ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων. Αυτό αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη παραμορφωμένη κατάσταση της διατομής, η οποία με την σειρά της καθορίζεται από δεδομένες τιμές των παραμέτρων  $\theta$ ,  $\varphi$  και  $\varepsilon_0$ .

Στην γενική περίπτωση, θεωρείται ότι το τμήμα του διαγράμματος τάσεων – παραμορφώσεων το οποίο αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο τραπέζιο είναι ένα κυβικό πολυώνυμο:

$$\sigma(\varepsilon) = \sum_{i=0}^3 (a_i \varepsilon^i) \quad (6.7.5)$$

όπου, οι συντελεστές  $a_i$  είναι γνωστοί από τις ιδιότητες του υλικού. Αν το τραπέζιο περιέχει σημείο αλλαγής μεταξύ τμημάτων του διαγράμματος τάσεων – παραμορφώσεων, τότε το τραπέζιο χωρίζεται κατάλληλα στα δύο από μια ευθεία γραμμή παράλληλη με τον άξονα των  $Y$ . Έτσι, κάθε τραπέζιο καλύπτεται πάντα από μόνον ένα τμήμα του διαγράμματος τάσεων – παραμορφώσεων.

Με αντικατάσταση της σχέσης (6.7.2) στην (6.7.5) προκύπτει ότι:

$$\sigma(\varphi, \varepsilon_0, z) = \sum_{i=0}^3 (b_i z^i) \quad (6.7.6)$$

όπου:

$$\begin{aligned} b_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_0 + \alpha_2 \varepsilon_0^2 + \alpha_3 \varepsilon_0^3 \\ b_1 &= 3 \alpha_3 \varepsilon_0^2 \varphi + 2 \alpha_2 \varepsilon_0 \varphi + \alpha_1 \varphi \\ b_2 &= 3 \alpha_3 \varepsilon_0 \varphi^2 + \alpha_2 \varphi^2 \\ b_3 &= \alpha_3 \varphi^3 \end{aligned} \quad (6.7.7)$$

Οι συνισταμένες δυνάμεις του τραπέζιου  $j$  προκύπτουν με ολοκλήρωση της σχέσης (6.7.6) ως εξής:

$$N_x^j = \iint_{\text{τραπέζιο } j} \left( \sum_{i=0}^3 (b_i z^i) \right) dA = \sum_{i=0}^3 \left( b_i \iint_{\text{τραπέζιο } j} (z^i) dA \right) = \sum_{i=0}^3 (b_i I_{(0,i)}^j) \quad (6.7.8)$$

$$M_y^j = \iint_{\text{τραπέζιο } j} \left( \sum_{i=0}^3 (b_i z^i) z \right) dA = \sum_{i=0}^3 \left( b_i \iint_{\text{τραπέζιο } j} (z^{i+1}) dA \right) = \sum_{i=0}^3 (b_i I_{(0,i+1)}^j) \quad (6.7.9)$$

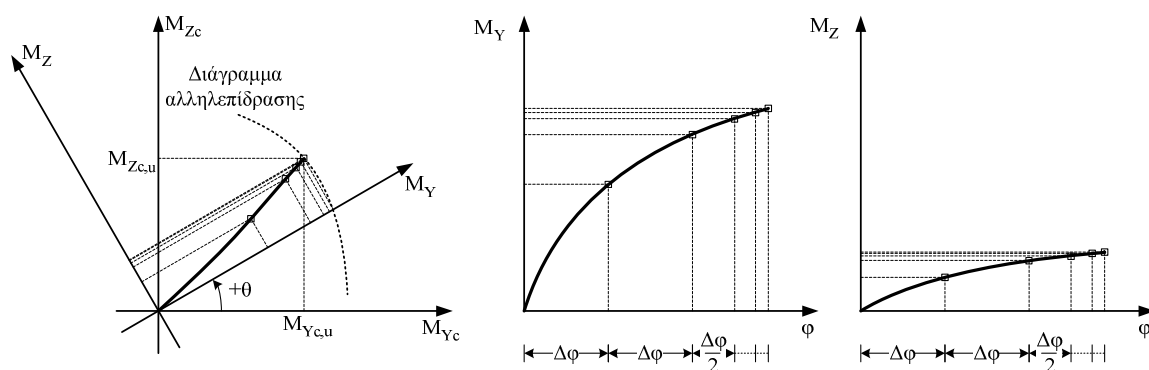
$$M_z^j = \iint_{\text{τραπέζιο } j} \left( \sum_{i=0}^3 (b_i z^i) y \right) dA = \sum_{i=0}^3 \left( b_i \iint_{\text{τραπέζιο } j} (z^i y) dA \right) = \sum_{i=0}^3 (b_i I_{(1,i)}^j) \quad (6.7.10)$$

Σημειώνεται ότι τα ολοκληρώματα  $I_{(m,n)}^j$  στις σχέσεις (6.7.8) ως (6.7.10) είναι γνωστά. Οι συνισταμένες δυνάμεις ολόκληρης της διατομής προκύπτουν με απλή άθροιση των αντίστοιχων δυνάμεων από όλα τα τραπέζια. Συνολικά, τα βήματα για τον υπολογισμό των συνισταμένων δυνάμεων της διατομής ( $N_x, M_y, M_z$ ) είναι τα εξής:

- Επιλέγεται η καμπυλότητα  $\varphi$  και η παραμόρφωση  $\varepsilon_0$ ,
- Για κάθε τραπέζιο  $j$ :
  - Υπολογίζονται οι συντελεστές  $b_i$  ως συνάρτηση των  $a_i$  (σχέσεις (6.7.7)),
  - Υπολογίζονται οι συνισταμένες δυνάμεις με βάση τις γνωστές τιμές των  $I_{(m,n)}^j$  (σχέσεις (6.7.8) ως (6.7.10)).
- Υπολογίζονται οι συνισταμένες δυνάμεις της διατομής ( $N_x, M_y, M_z$ ) ως άθροισμα των αντιστοίχων δυνάμεων όλων των τραπέζιων.

### 6.7.10 Κατασκευή διαγραμμάτων ροπών – καμπυλοτήτων

Για δεδομένο αξονικό φορτίο  $N_x$  και διεύθυνση ουδέτερου άξονα  $\theta$ , είναι δυνατή η κατασκευή του πλήρους διαγράμματος ροπών – καμπυλοτήτων τόσο για την πρωτεύουσα καμπτική ροπή  $M_y$  όσο και για την δευτερεύουσα ροπή  $M_z$  (Εικόνα 6.7.7). Η τελευταία οφείλεται στην ασυμμετρία της διατομής και είναι αναγκαία ώστε να διατηρηθεί η διεύθυνση του ουδέτερου άξονα σταθερή καθ' όλη την διαδικασία.



**Εικόνα 6.7.7: Διαγράμματα ροπών – καμπυλοτήτων και μέγιστη αντοχή**

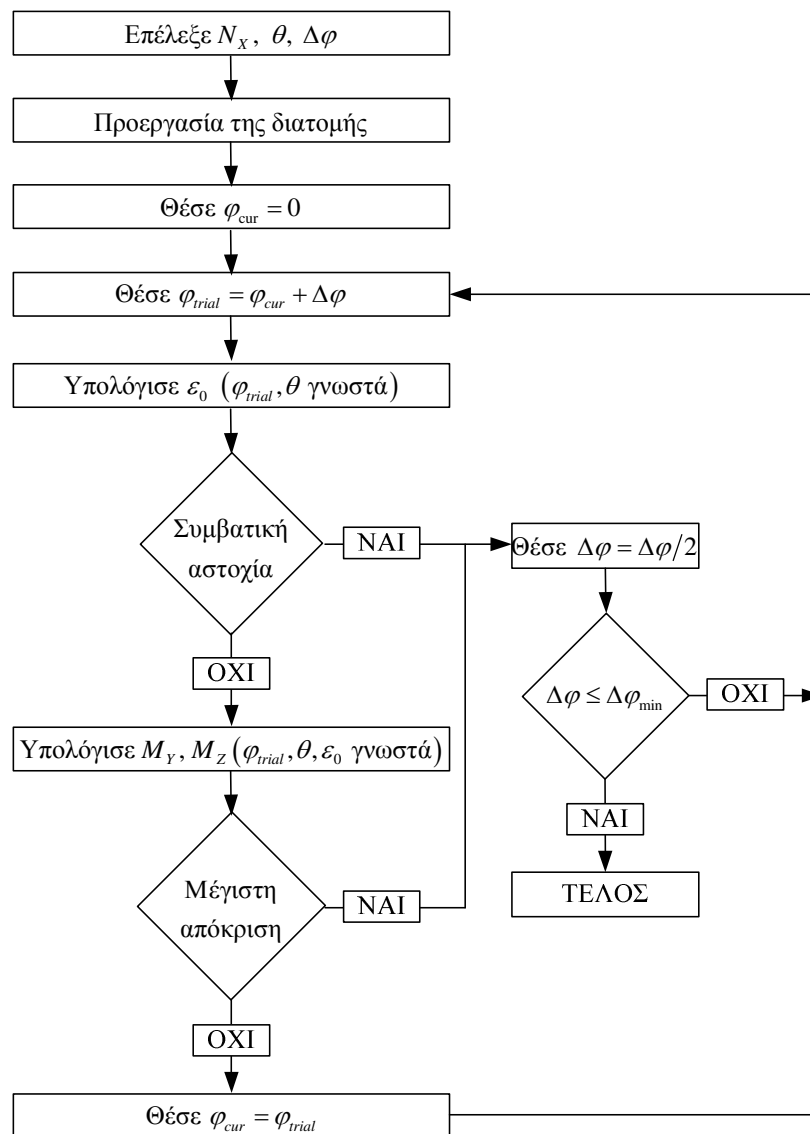
Μετά την προεργασία της διατομής, δηλαδή την περιστροφή, την κατάτμηση σε τραπέζια και τον υπολογισμό των βασικών επιφανειακών ολοκληρωμάτων, η επιβαλλόμενη καμπυλότητα  $\phi$  αυξάνεται σταδιακά. Αν το αρχικό βήμα  $\Delta\phi$ , το οποίο καθορίζεται από τον χρήστη, είναι μικρό τότε προκύπτουν ομαλά διαγράμματα ροπών – καμπυλοτήτων αλλά αυξάνεται ανάλογα το υπολογιστικό κόστος.

Σε κάθε βήμα, οι τιμές των  $\theta$  και  $\phi$  είναι γνωστές. Συνεπώς, η παραμορφωμένη κατάσταση της διατομής είναι συνάρτηση μόνον της παραμόρφωσης  $\varepsilon_0$ . Για τον υπολογισμό της τιμής της  $\varepsilon_0$  η οποία εξασφαλίζει την ισορροπία των αξονικών δυνάμεων με δεδομένη ακρίβεια χρησιμοποιείται μια γρήγορη μέθοδος ριζών, όπως η μέθοδος Wijnngaarden – Dekker – Brent [65]. Στην συνέχεια, αφού έχει υπολογισθεί η παραμορφωμένη κατάσταση, υπολογίζονται οι αντίστοιχες τιμές των καμπτικών ροπών  $M_Y$ ,  $M_Z$  και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Αν το βήμα καμπυλότητας  $\Delta\phi$  δεν μπορεί να εφαρμοστεί, τότε αυτό μειώνεται στο μισό και ο αλγόριθμος επαναλαμβάνει την απόπειρα ώστε να υπολογιστεί η μέγιστη αντοχή της διατομής με μεγαλύτερη ακρίβεια. Αυτό συμβαίνει σε δύο περιπτώσεις:

- 1) Όταν η απόκριση με την δοκιμαστική νέα τιμή της καμπυλότητας είναι μικρότερη από αυτή του προηγούμενου βήματος. Αυτό σημαίνει ότι ξεκινάει ένας κατερχόμενος κλάδος και ότι έχει επιτευχθεί η μέγιστη αντοχή της διατομής.

2) Όταν παραβιάζεται η μέγιστη τιμή της εφελκυστικής ή θλιπτικής παραμόρφωσης κάποιου υλικού. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε συμβατική αστοχία της διατομής.



Εικόνα 6.7.8: Διάγραμμα ροής: κατασκευή διαγράμματος ροπών - καμπυλοτήτων

Προαιρετικά, μπορεί να εφαρμοστεί και ένας τρίτος κανόνας αστοχίας ο οποίος αναφέρεται στην μέγιστη ομοιόμορφη θλίψη. Στην περίπτωση του Ευρωκώδικα 2, αυτός ο κανόνας βασίζεται σε ένα σημείο "C" το οποίο απέχει απόσταση ίση με  $3/7 h$  από την πλέον



θλιβόμενη ίνα. Το σημείο αυτό πρέπει να έχει μέγιστη θλιπτική παραμόρφωση ίση με 0.2% [168].

Συνολικά, η διαδικασία σταματά όταν το συνεχώς μειούμενο βήμα καμπυλότητας  $\Delta\varphi$  φτάσει ένα προκαθορισμένο κάτω όριο. Το διάγραμμα ροής της διαδικασίας φαίνεται στην Εικόνα 6.7.8.

### 6.7.11 Υπολογισμός μέγιστης αντοχής

Για δεδομένο αξονικό φορτίο  $N_X$  και διεύθυνση ουδέτερου άξονα  $\theta$ , είναι δυνατός ο υπολογισμός της μέγιστης αντοχής της διατομής. Αυτό επιτυγχάνεται με την διαδικασία που περιγράφεται στην §6.7.10, με την σημαντική διαφορά ότι ένα σχετικά μεγάλο αρχικό βήμα επιβαλλόμενης καμπυλότητας  $\Delta\varphi$  μειώνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος. Σε αυτή την περίπτωση τα ενδιάμεσα στάδια δεν ενδιαφέρουν, ενώ σημειώνεται ότι η ακρίβεια κατά τον υπολογισμό της μέγιστης αντοχής δεν εξαρτάται από το αρχικό  $\Delta\varphi$ .

Οι καμπτικές ροπές που προκύπτουν κατά το τελευταίο βήμα της διαδικασίας μπορούν να εκφραστούν στο αρχικό σύστημα αναφοράς  $XY_cZ_c$  ως εξής:

$$\begin{bmatrix} M_{Y_c} \\ M_{Z_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_Y \\ M_Z \end{bmatrix} \quad (6.7.11)$$

Με αυτό τον τρόπο προκύπτει το σημείο  $(N_X, M_{Y_c,u}, M_{Z_c,u})$  της επιφάνειας αστοχίας (Εικόνα 6.7.7).

### 6.7.12 Διαγράμματα αλληλεπίδρασης

Με υπολογισμό σημείων που αντιστοιχούν σε μέγιστη αντοχή, είναι δυνατή η κατασκευή δύο ειδών διαγραμμάτων αλληλεπίδρασης:

- Για δεδομένο αξονικό φορτίο  $N_X$  μπορούν να κατασκευαστούν διαγράμματα αλληλεπίδρασης  $M_{Y_c} - M_{Z_c}$ . Τα διαγράμματα αυτά είναι «παράλληλοι» της επιφάνειας αστοχίας και ανήκουν εξ' ολοκλήρου σε επίπεδο κάθετο στον άξονα των αξονικών

δυνάμεων. Η διαδικασία επιτυγχάνεται μεταβάλλοντας την διεύθυνση του ουδέτερου άξονα  $\theta$  μεταξύ  $0^\circ$  και  $360^\circ$ . Αν η διατομή παρουσιάζει κάποιου είδους συμμετρίας, απαιτείται μικρότερο εύρος γωνιών και το υπολογιστικό κόστος μειώνεται σημαντικά.

- ο Για δεδομένη διεύθυνση του ουδέτερου άξονα  $\theta$  μπορούν να κατασκευαστούν διαγράμματα αλληλεπίδρασης  $N_x - M$ . Τα διαγράμματα αυτά είναι «μεσημβρινοί» της επιφάνειας αστοχίας αλλά γενικά δεν ανήκουν εξ' ολοκλήρου σε κάποιο επίπεδο. Αυτό οφείλεται στην δευτερεύουσα καμπτική ροπή, η οποία με την σειρά της οφείλεται σε ενδεχόμενη ασυμμετρία της διατομής. Η διαδικασία επιτυγχάνεται μεταβάλλοντας την επιβαλλόμενη αξονική δύναμη  $N_x$ .

### 6.7.13 Επιφάνεια αστοχίας

Αντίστοιχα, η πλήρης επιφάνεια αστοχίας μιας διατομής μπορεί να κατασκευαστεί με δύο τρόπους:

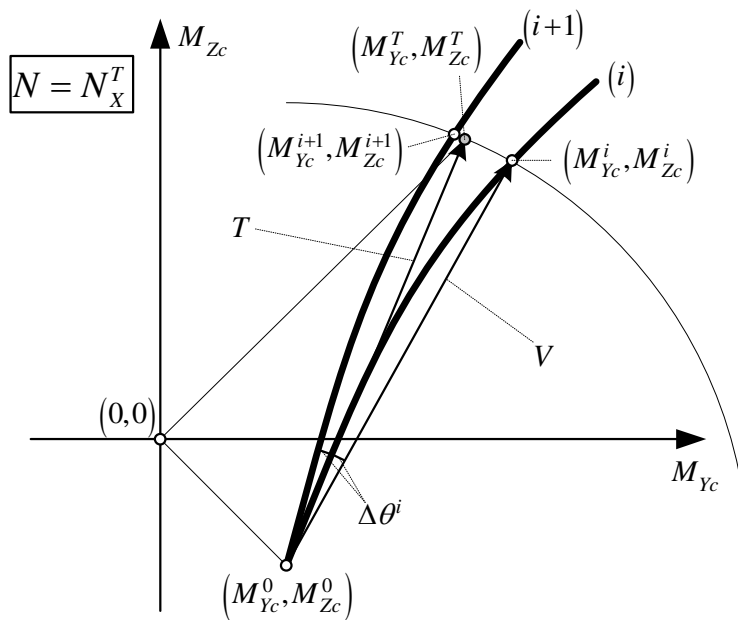
- ο Με πολλαπλά διαγράμματα αλληλεπίδρασης  $M_{Yc} - M_{Zc}$  για διάφορες τιμές του αξονικού φορτίου  $N_x$ ,
- ο Με πολλαπλά διαγράμματα αλληλεπίδρασης  $N_x - M$  για διάφορες διευθύνσεις του ουδέτερου άξονα  $\theta$  μεταξύ  $0^\circ$  και  $360^\circ$ .

### 6.7.14 Υπολογισμός παραμορφωμένης κατάστασης

Η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της παραμορφωμένης κατάστασης της διατομής υπό δεδομένα εξωτερικά φορτία  $(N_x^T, M_{Yc}^T, M_{Zc}^T)$ . Για αυτό το σκοπό, απαιτείται η κατασκευή μιας σειράς διαγραμμάτων ροπών – καμπυλοτήτων, όπως περιγράφεται στην §6.7.10. Όλες οι αναλύσεις χρησιμοποιούν ως αξονικό φορτίο το  $N_x^T$ . Ανεξάρτητα από την επιλεγθείσα διεύθυνση του ουδέτερου άξονα  $\theta$ , όλα τα διαγράμματα ροπών – καμπυλοτήτων ξεκινούν με καμπυλότητα ίση με το μηδέν. Συνεπώς, όλα τα ίχνη των αναλύσεων ξεκινούν από το ίδιο σημείο  $(M_{Yc}^0, M_{Zc}^0)$ , όπου  $M_{Yc}^0$

και  $M_{Zc}^0$  είναι οι καμπτικές ροπές που αντιστοιχούν σε τέτοια ομοιόμορφη θλίψη ώστε να επιτυγχάνεται ισορροπία αξονικών δυνάμεων (Εικόνα 6.7.9).

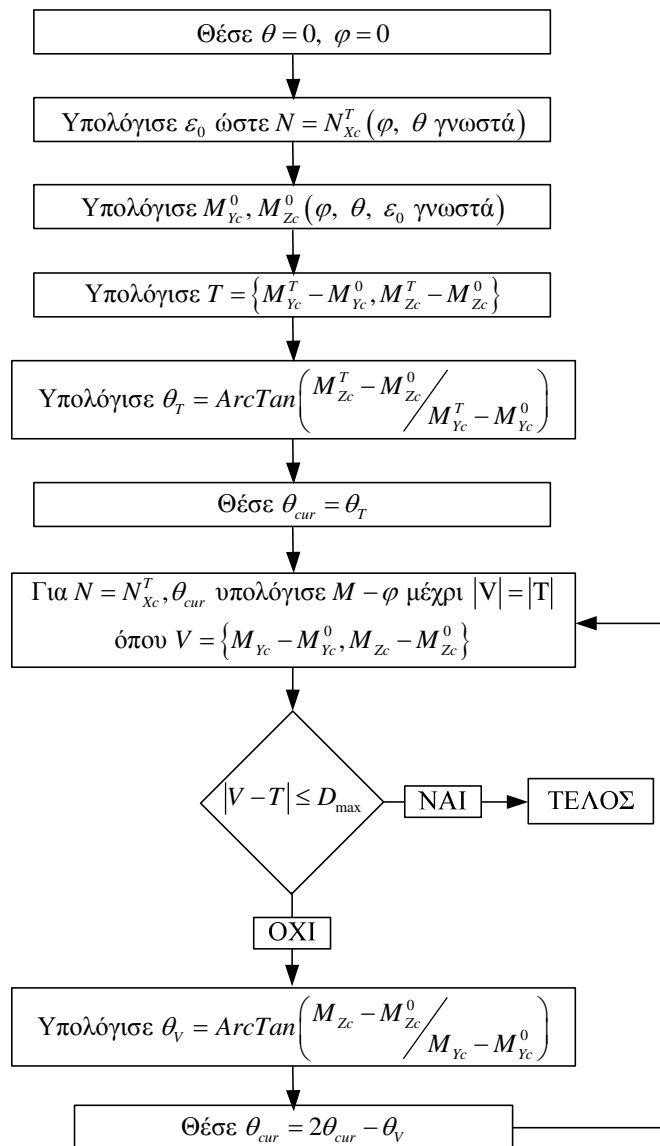
Ο υπολογισμός βασίζεται σε μια μέθοδο δοκιμής και σφάλματος (trial-and-error). Αναζητείται η διεύθυνση του ουδέτερου άξονα  $\theta$  η οποία οδηγεί την απόκριση της διατομής από το σημείο  $(M_{Yc}^0, M_{Zc}^0)$  στο δεδομένο σημείο  $(M_{Yc}^T, M_{Zc}^T)$ . Η απόκριση γενικά δεν ακολουθεί ευθεία γραμμή λόγω της δευτερεύουσας καμπτικής ροπής  $M_Z$  και της ασυμμετρίας της διατομής.



**Εικόνα 6.7.9: Υπολογισμός παραμορφωμένης κατάστασης διατομής υπό δεδομένα εξωτερικά φορτία**

Ως πρώτη δοκιμή, η διεύθυνση του ουδέτερου άξονα τίθεται ίση με την διεύθυνση του διανύσματος  $T$  το οποίο ενώνει τα σημεία  $(M_{Yc}^0, M_{Zc}^0)$  και  $(M_{Yc}^T, M_{Zc}^T)$ . Καθώς αυξάνεται η καμπυλότητα  $\varphi$ , η απόκριση παρεκκλίνει της ευθείας γραμμής. Όταν το μήκος (νόρμα) του δοκιμαστικού διανύσματος  $V$  γίνει ίσο με αυτό του διανύσματος  $T$ , η διαδικασία σταματά. Γενικά, οι καμπτικές ροπές  $M_{Yc}^i$  και  $M_{Zc}^i$  θα διαφέρουν από τις  $M_{Yc}^T, M_{Zc}^T$ . Έτσι, η διεύθυνση του ουδέτερου άξονα  $\theta$  διορθώνεται με βάση την διαφορά των διευθύνσεων

$\Delta\theta^i$  μεταξύ των διανυσμάτων  $T$  και  $V$ . Ως αποτέλεσμα, στην επόμενη δοκιμή οι καμπτικές ροπές  $M_{Yc}^{i+1}$  και  $M_{Zc}^{i+1}$  βρίσκονται πιο κοντά στις επιθυμητές τιμές. Η διαδικασία σταματά όταν επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια μεταξύ της υπολογιζόμενης απόκρισης της διατομής και των δεδομένων εξωτερικών φορτίων. Σε αυτό το σημείο, οι παράμετροι  $\theta$ ,  $\varphi$  και  $\varepsilon_0$  καθορίζουν την παραμορφωμένη κατάσταση της διατομής. Το διάγραμμα ροής αυτής της διαδικασίας παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.7.10.



Εικόνα 6.7.10: Διάγραμμα ροής: υπολογισμός παραμορφωμένης κατάστασης

## 6.8 Εφαρμογές

### 6.8.1 Διαγράμματα αλληλεπίδρασης ορθογωνικής διατομής

Η προτεινόμενη μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή διαγραμμάτων αλληλεπίδρασης μιας ορθογωνικής διατομής με ίση ποσότητα οπλισμού στην εφελκυσόμενη και θλιβόμενη ζώνη. Οι υπολογισμοί έγιναν σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 2 [168] για ποιότητα χάλυβα S500 και επικάλυψη  $d_1 = 0.10h$ , όπου  $h$  το συνολικό ύψος της διατομής. Τα διαγράμματα αλληλεπίδρασης αφορούν συνδυασμούς αξονικών φορτίων και αντίστοιχων μέγιστων καμπτικών ροπών για διάφορες ποσότητες διαμήκους οπλισμού. Η ποσότητα του οπλισμού εκφράζεται από το μηχανικό ποσοστό  $\omega$  ως εξής:

$$\omega = \frac{A_{s,tot} f_{yd}}{A_{c,tot} f_{cd}} \quad (6.8.1)$$

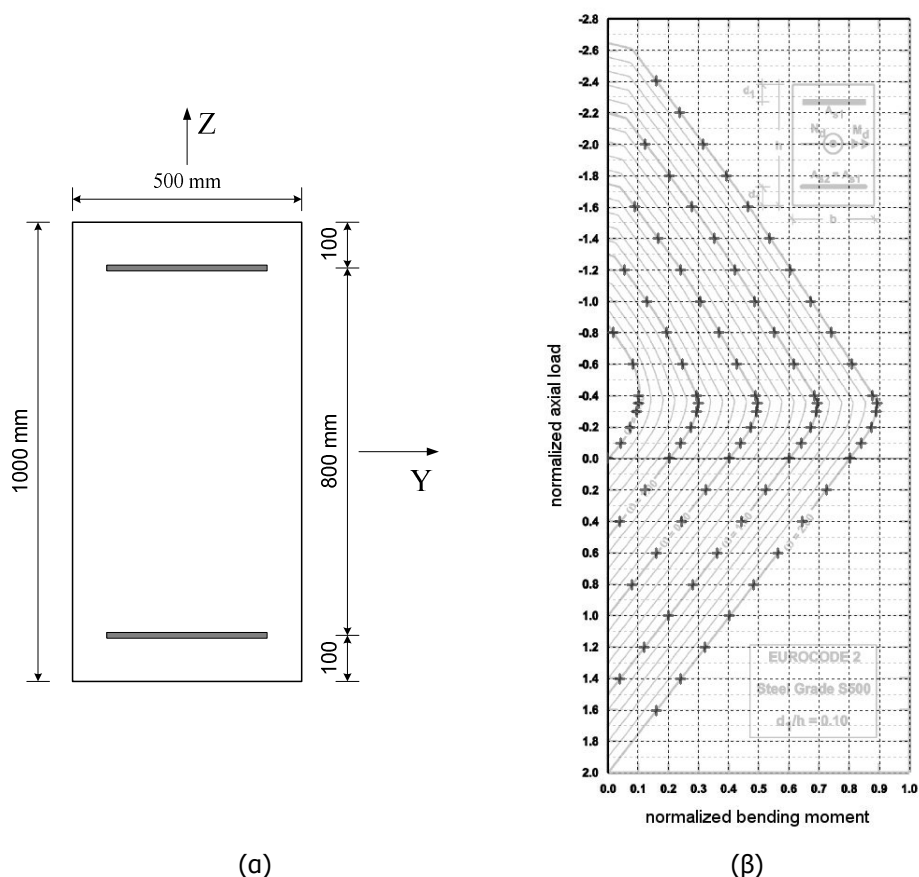
όπου:

- $A_{s,tot}$  είναι το συνολικό εμβαδόν του διαμήκους οπλισμού,
- $A_{c,tot}$  είναι το εμβαδόν της διατομής σκυροδέματος (η οποία μπορεί να ληφθεί χονδρικά ίσο με το εμβαδόν της διατομής),
- $f_{yd}$  είναι η αντοχή σχεδιασμού του χάλυβα,
- $f_{cd}$  είναι η αντοχή σχεδιασμού του σκυροδέματος.

Το αξονικό φορτίο και οι καμπτικές ροπές που δρουν στην διατομή κανονικοποιούνται με βάση τις ιδιότητες του σκυροδέματος και τις διαστάσεις της διατομής ως εξής:

$$\nu = \frac{N_d}{A_{c,tot} f_{cd}} \quad (6.8.2)$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_{c,tot} h f_{cd}}$$



**Εικόνα 6.8.1: (α) ορθογωνική διατομή υπό εξέταση (β) διαγράμματα αλληλεπίδρασης σύμφωνα με EC 2**

Ο Ευρωκώδικας 2 καθορίζει την τιμή 0.020 ως την μέγιστη παραμόρφωση του διαμήκους οπλισμού [168]. Επίσης, στην περίπτωση έντονα θλιπτικών φορτίων, μειώνει την καμπτική αντοχή επιβάλλοντας την περιστροφή του επιπέδου της παραμορφωμένης διατομής γύρω από ένα σημείο "C" που απέχει 3/7 του ύψους από την πλέον θλιβόμενη ίνα και το οποίο παρουσιάζει παραμόρφωση ίση με -0.002. Ο περιορισμός αυτός λήφθηκε υπόψη στους υπολογισμούς με την προτεινόμενη μέθοδο.

Οι χαρακτηριστικές τιμές αντοχής καθώς και οι επιμέρους συντελεστές ασφαλείας του σκυροδέματος και του χάλυβα λήφθηκαν ως εξής:

$$\begin{aligned} f_{ck} &= 20\text{MPa}, \gamma_c = 1.5 \\ f_y &= 500\text{MPa}, \gamma_r = 1.15 \end{aligned} \tag{6.8.3}$$

Πραγματοποιήθηκαν υπολογισμοί για πέντε περιπτώσεις μηχανικού ποσοστού, ήτοι  $\omega = 0.00, 0.50, 1.00, 1.50$  και  $2.00$ . Όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.8.1, υπάρχει πλήρης ταύτιση των αποτελεσμάτων με αυτά που παρέχονται από τον Ευρωκώδικα 2.

### 6.8.2 Διαγράμματα αλληλεπίδρασης μη συμμετρικής διατομής

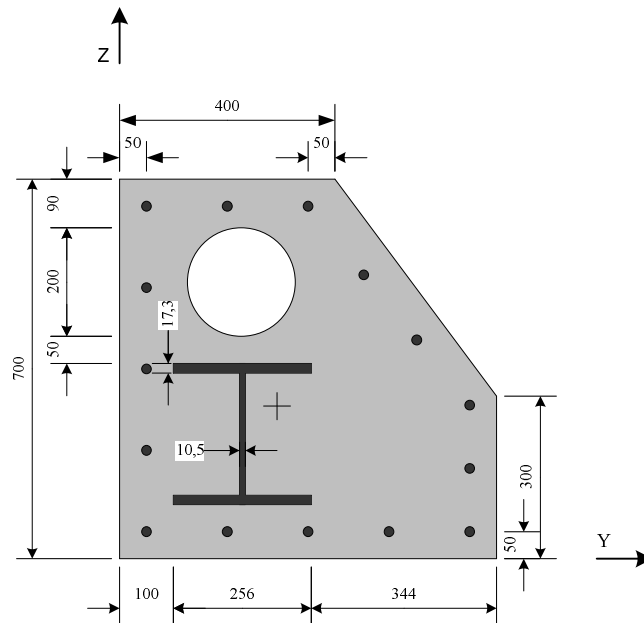
Η προτεινόμενη μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση μιας μη συμμετρικής διατομής, η οποία υπήρξε αντικείμενο ανάλυσης στην εργασία των Chen et al. [149]. Η διατομή αποτελείται από πυρήνα σκυροδέματος, μια διατομή χάλυβα τοποθετημένη ασύμμετρα, 15 ράβδους διαμήκους οπλισμού διαμέτρου 18mm καθώς και μια κυκλική οπή (Εικόνα 6.8.2).

Η καμπύλη τάσης – παραμόρφωσης του σκυροδέματος αποτελείται από μια παραβολή και μια ευθεία (οριζόντια) γραμμή με  $f_{cc} = 0.85 f_{ck} / \gamma_c$ ,  $\varepsilon_0 = 0.002$  και  $\varepsilon_{cu} = 0.0035$ . Το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα λήφθηκε ίσο με  $200\text{ GPa}$  ενώ η μέγιστη παραμόρφωση λήφθηκε ίση με  $\varepsilon_u = \pm 0.010$ . Οι χαρακτηριστικές τιμές των αντοχών και οι μερικοί συντελεστές ασφαλείας για το σκυρόδεμα, τον δομικό χάλυβα και τον διαμήκη οπλισμό λήφθηκαν αντιστοίχως ίσοι με:

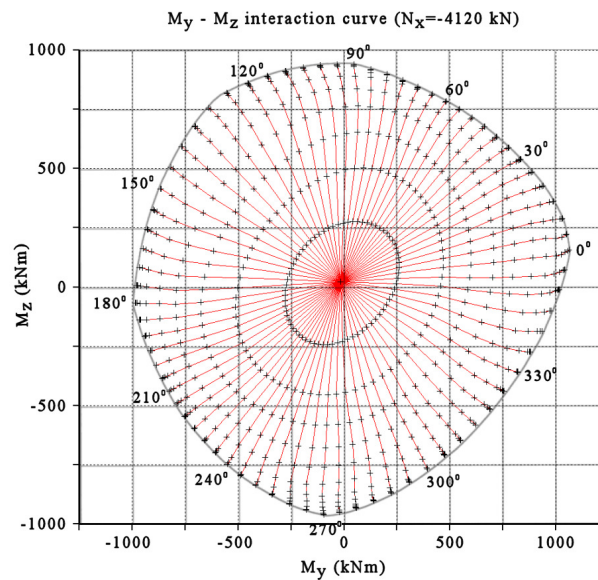
$$\begin{aligned} f_{ck} &= 30\text{MPa}, \gamma_c = 1.5 \\ f_s &= 355\text{MPa}, \gamma_s = 1.1 \\ f_y &= 460\text{MPa}, \gamma_r = 1.15 \end{aligned} \quad (6.8.4)$$

Στην Εικόνα 6.8.3 φαίνεται το διάγραμμα αλληλεπίδρασης της διατομής για αξονικό φορτίο  $N_x = -4120\text{kN}$ . Το διάγραμμα κατασκευάστηκε μεταβάλλοντας την διεύθυνση του ουδέτερου άξονα με βήμα  $5^\circ$ . Στο υπόβαθρο της εικόνας φαίνονται τα αποτελέσματα των Chen et al. [149] με τα οποία υπάρχει πρακτικά πλήρης ταύτιση. Τέλος, στην ίδια εικόνα φαίνονται τα ακτινωτά ίχνη των επιμέρους αναλύσεων καθώς και οι αντίστοιχες διευθύνσεις του ουδέτερου άξονα. Σημειώνεται ότι, για να επιτευχθεί η ταύτιση των αποτελεσμάτων με το άρθρο [149] θεωρήθηκε ότι οι διατομές του διαμήκους οπλισμού είναι αδιάστατες ίνες. Όπως θα δειχθεί στην επόμενη παράγραφο, η παραδοχή αυτή εισάγει κάποιο σφάλμα το

οποίο ενδέχεται να είναι σημαντικό. Η προτεινόμενη μέθοδος έχει πάντως την δυνατότητα να λάβει υπόψη το εμβαδόν του σκυροδέματος που καταλαμβάνεται από τον διαμήκη οπλισμό.



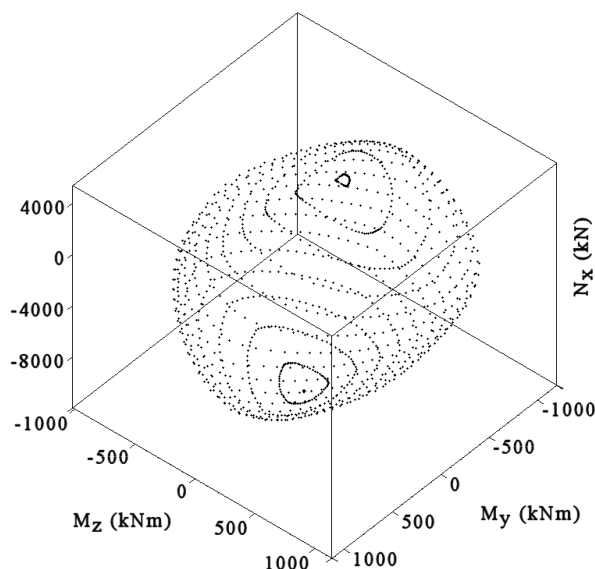
Εικόνα 6.8.2: Μη συμμετρική διατομή [149] (διαστάσεις σε mm)



Εικόνα 6.8.3: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης για  $N_x = -4120 \text{ kN}$



Με υπολογισμό διαγραμμάτων αλληλεπίδρασης για διάφορες τιμές του αξονικού φορτίου προκύπτει η πλήρης επιφάνεια αστοχίας (Εικόνα 6.8.4).

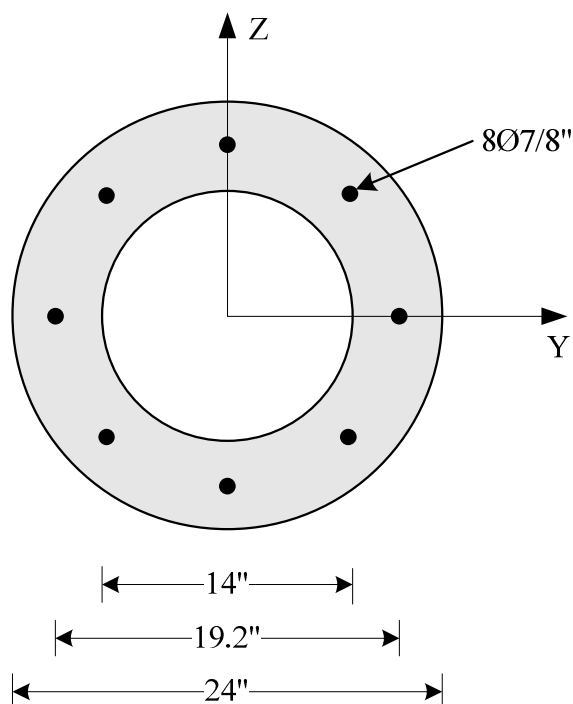


Εικόνα 6.8.4: Πλήρης επιφάνεια αστοχίας

### 6.8.3 Πλεονεκτήματα της προτεινόμενης μεθόδου – παραμετρική μελέτη

Για να επιδειχθούν τα πλεονεκτήματα της προτεινόμενης μεθόδου έγινε μια παραμετρική μελέτη σχετικά με τις δύο κύριες πηγές λάθους των υπολοίπων αλγορίθμων που έχουν παρουσιαστεί κατά καιρούς στην βιβλιογραφία. Το πρώτο λάθος αφορά την προσομοίωση καμπύλων ή κυκλικών διατομών με απλά πολύγωνα, ενώ το δεύτερο αφορά την θεώρηση των διατομών του οπλισμού ως αδιάστατες ίνες, η οποία έχει ως αποτέλεσμα το εμβαδόν τους να υπολογίζεται ως διατομή σκυροδέματος. Αν και οι αβεβαιότητες στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων μπορεί να οφείλονται σε πολλούς παράγοντες, όπως οι ιδιότητες των υλικών και τα φαινόμενα περίσφιγξης, αποδεικνύεται ότι τα προαναφερθέντα λάθη μπορεί να είναι σημαντικά και μπορούν να αποφευχθούν.

Για τον σκοπό της παραμετρικής μελέτης, επιλέχθηκε το παράδειγμα που αναλύθηκε από τους Rodriguez και Aristizabal-Ochoa [156] (Εικόνα 6.8.5):

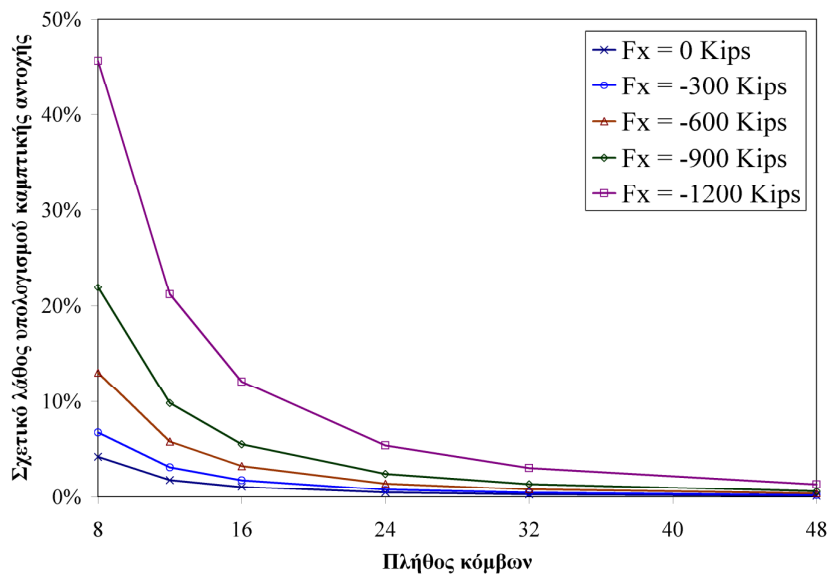


**Εικόνα 6.8.5: Διατομή που αναλύθηκε από τους Rodriguez και Aristizabal-Ochoa [156]**

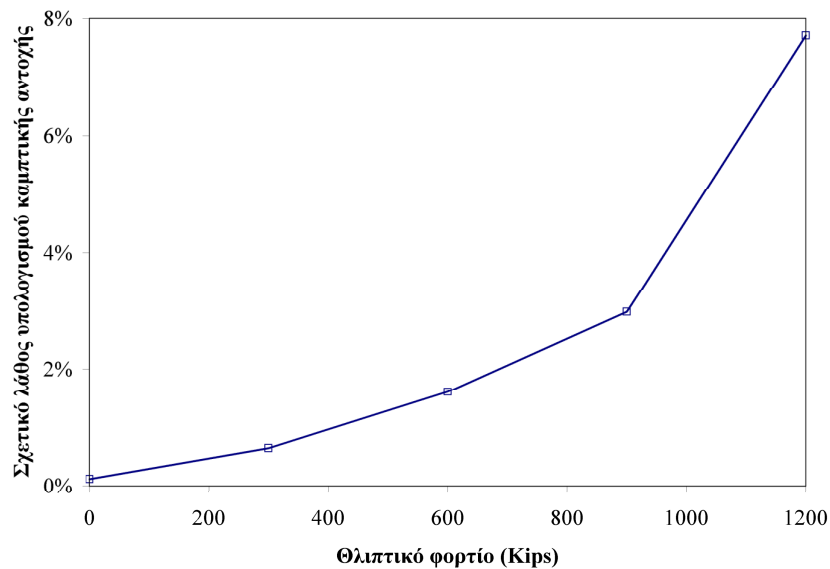
Το διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης του σκυροδέματος αποτελείται από ένα παραβολικό τμήμα με  $\varepsilon_0 = 0.002$ ,  $f'_c = 27.58$  και ένα γραμμικά κατερχόμενο κλάδο με  $\varepsilon_u = 0.0038$  και  $f_c'' = 0.85f'_c$ . Το διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης του χάλυβα είναι διγραμμικό με  $f_y = 413.69MPa$  και  $E_s = 200GPa$ .

Στην Εικόνα 6.8.6 φαίνεται το σχετικό λάθος κατά τον υπολογισμό της καμπτικής αντοχής λόγω προσομοίωσης των κύκλων με απλά πολύγωνα. Το λάθος είναι συνάρτηση του πλήθους των κόμβων καθώς και του αξονικού φορτίου. Από τα αποτελέσματα είναι φανερό ότι το λάθος είναι σημαντικό για προσομοιώσεις με λιγότερους από 16 κόμβους. Επίσης, το λάθος αυξάνεται καθώς αυξάνεται το θλιπτικό φορτίο.

Στην Εικόνα 6.8.7 παρουσιάζεται το σχετικό λάθος κατά τον υπολογισμό της καμπτικής αντοχής λόγω χρήσης αδιάστατων ινών. Το λάθος είναι συνάρτηση του αξονικού φορτίου. Από την εικόνα είναι σαφές ότι το λάθος γίνεται σημαντικό στην περίπτωση μεγάλων θλιπτικών φορτίων.



Εικόνα 6.8.6: Σχετικό λάθος καμπτικής αντοχής σε συνάρτηση με το πλήθος των κόμβων



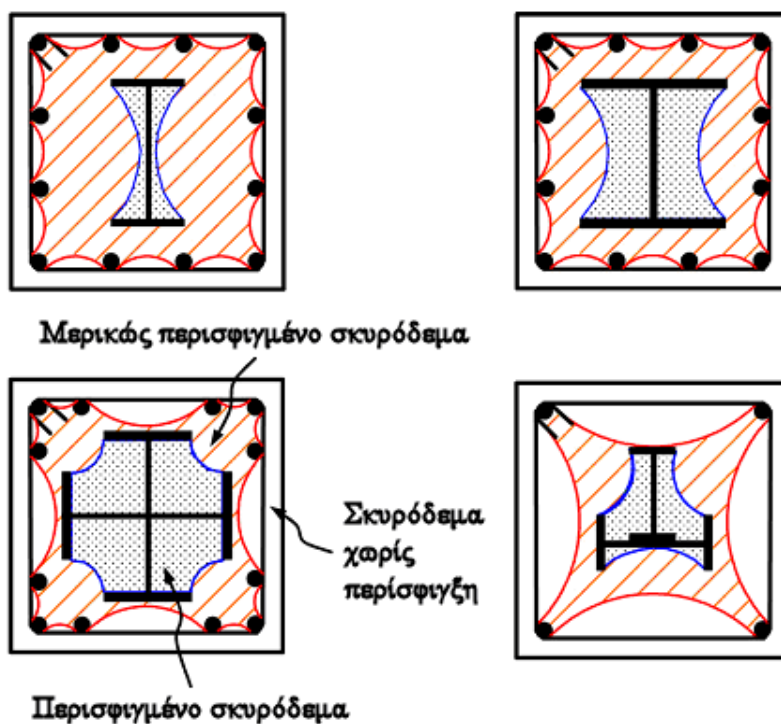
Εικόνα 6.8.7: Σχετικό λάθος καμπτικής αντοχής λόγω χρήσης αδιάστατων ινών

Όλες οι προαναφερθείσες αναλύσεις έγιναν με την προτεινόμενη μέθοδο. Όσον αφορά την προσομοίωση των κύκλων με πολύγωνα, η προτεινόμενη μέθοδος δίνει αναλυτικά ακριβείς λύσεις τόσο με χρήση πολυγώνων όσο και κύκλων. Σημειώνεται ότι το πλήθος των

κόμβων καθορίζει τις κορυφές των εγγεγραμμένων πολυγώνων του *κάθε* κύκλου. Για την προσομοίωση της χρήσης αδιάστατων ινών, αρκεί να μην δοθεί το σκυρόδεμα ως «αφαιρούμενο» υλικό στους κύκλους που αναπαριστούν τον διαμήκη οπλισμό.

#### 6.8.4 Ανάλυση σύμμικτης διατομής με πολλαπλά επίπεδα περίσφιγξης

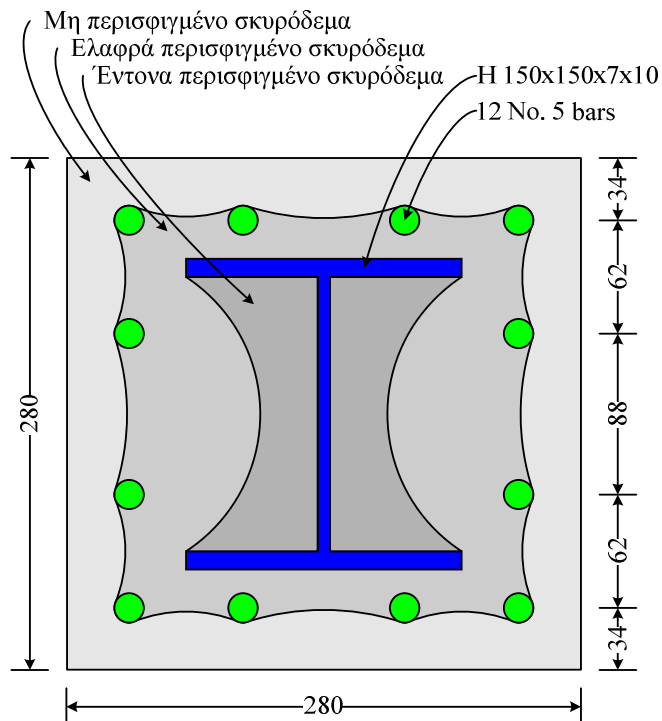
Η χρήση σύμμικτων υποστυλωμάτων είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη. Ο δομικός χάλυβας εξασφαλίζει αυξημένη ικανότητα ανάληψης φορτίων με μικρότερες διαστάσεις υποστυλώματος. Επιπλέον, παρέχει περίσφιγξη στο σκυρόδεμα, ιδιαίτερα στην περίπτωση χρήσης μεταλλικών σωλήνων γεμισμένων με σκυρόδεμα (concrete filled steel tubes - CFT). Από την άλλη πλευρά, το σκυρόδεμα προστατεύει τον χάλυβα από λυγισμό και ενδεχομένως από την φωτιά.



Εικόνα 6.8.8: Διατομές σύμμικτων υποστυλωμάτων κατά Chen και Lin [148]

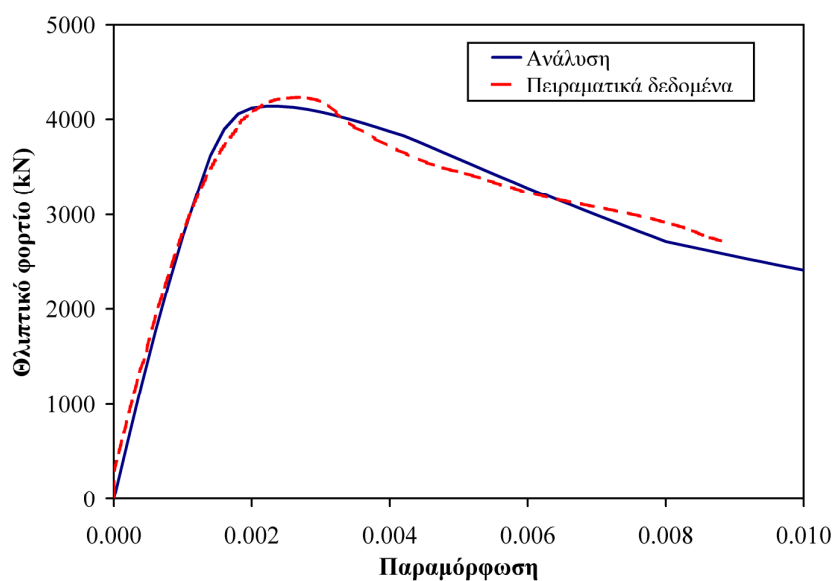
Πρόσφατα, οι Chen και Lin [148] ανέλυσαν τα δεδομένα από πειράματα αξονικής θλίψης σε 26 σύμμικτα υποστυλώματα. Τα υποστυλώματα αποτελούνταν από πυρήνα

σκυροδέματος, διαμήκη οπλισμό καθώς και μια εγκιβωτισμένη διατομή χάλυβα. Παρατηρήθηκε ότι τα υποστυλώματα μπορούσαν να φέρουν εν γένει μεγαλύτερα αξονικά φορτία σε σχέση με αυτά που θεωρητικά προβλέπονταν με βάση τις ιδιότητες των υλικών. Για να εξηγηθεί αυτή η διαφορά, θεωρήθηκε ότι υπάρχουν τρία είδη σκυροδέματος: το μη περισφιγμένο στην περίμετρο της διατομής, το ελαφρά περισφιγμένο λόγω των συνδετήρων του διαμήκους οπλισμού και το έντονα περισφιγμένο λόγω της εγκιβωτισμένης διατομής χάλυβα (Εικόνα 6.8.8). Για το σκυρόδεμα χρησιμοποιήθηκε ο νόμος τάσης – παραμόρφωσης του Mander et al. [155]. Στην περίπτωση του διαμήκους οπλισμού, το διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων θεωρήθηκε ότι παρουσιάζει έντονη παραμορφωσιακή χαλάρωση λόγω λυγισμού.



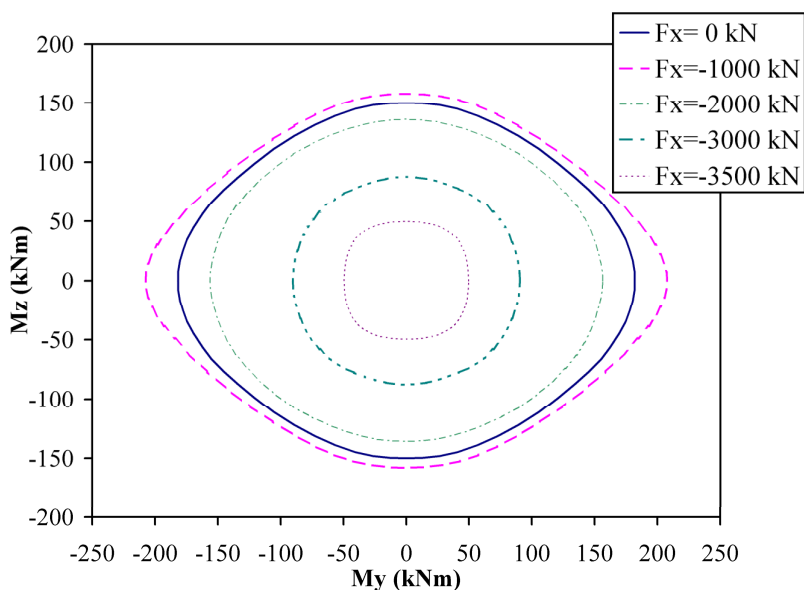
Εικόνα 6.8.9: Δοκίμιο SRC2 (διαστάσεις σε mm)

Η προτεινόμενη μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση ενός εκ των δοκιμίων, ήτοι του δοκιμίου SRC2. Η διατομή σχεδιάστηκε με πρόγραμμα CAD έτσι ώστε να βρίσκεται σε συμφωνία με τα στοιχεία του άρθρου [148]. Τα καμπύλα όρια μεταξύ των διαφόρων περιοχών της διατομής σχεδιάστηκαν ως κυκλικά τόξα (Εικόνα 6.8.9).



**Εικόνα 6.8.10: Απόκριση δοκιμίου SRC2 σε αξονική φόρτιση**

Με την παραπάνω θεώρηση, η απόκριση του δοκιμίου σε αξονική φόρτιση είναι πια σε καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα (Εικόνα 6.8.10). Κατ' επέκταση, μπορούν να υπολογιστούν τα διαγράμματα αλληλεπίδρασης της διατομής για διάφορες τιμές αξονικού φορτίου (Εικόνα 6.8.11).



Εικόνα 6.8.11: Διαγράμματα αλληλεπίδρασης δοκιμίου SRC2

### 6.8.5 Ταυτοποίηση παραμέτρων προσομοιώματος Bouc-Wen

Με βάση τα παραγόμενα διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων είναι δυνατή η ταυτοποίηση των βασικών παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επιτευχθεί με την χρήση μιας κατάλληλης αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία εκφράζει μονοκριτηριακά την ποιότητα των λύσεων, σε συνδυασμό με μια μέθοδο βελτιστοποίησης. Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής υλοποιήθηκε ένας αλγόριθμος ταυτοποίησης των παραμέτρων τόσο του βασικού προσομοιώματος (§4.2) όσο και του προσομοιώματος Sivaselvan – Reinhorn (§3.6) με χρήση διαφόρων παραλλαγών Γενετικών Αλγορίθμων, όπως ο Γενετικός Αλγόριθμος Sawtooth (§5.7.4). Η υλοποίηση περιγράφεται συνοπτικά στην §8.6. Ο αλγόριθμος αποδεικνύεται ότι είναι εξαιρετικά απλός και αποτελεσματικός.

[ΚΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ]



**7**

**Εφαρμογές**



## 7.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή των προτεινόμενων μεθόδων με χρήση του εξειδικευμένου λογισμικού δυναμικής ανάλυσης Plastique [170], [177]. Στο Plastique προστέθηκαν οι κατάλληλες ρουτίνες ώστε να υπάρχει η δυνατότητα ανάλυσης με βάση το τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc-Wen (Κεφάλαιο 4).

## 7.2 Plastique

### 7.2.1 Τύποι ανάλυσης

Το πρόγραμμα Plastique υπολογίζει τη μη γραμμική απόκριση της κατασκευής για τους εξής τύπους ανάλυσης:

- Μονοτονική Στατική Ανάλυση,
- Ψευδο-στατική Ανακυκλιζόμενη,
- Δυναμική Ανάλυση.

### 7.2.2 Προσομοίωση δομικών στοιχείων

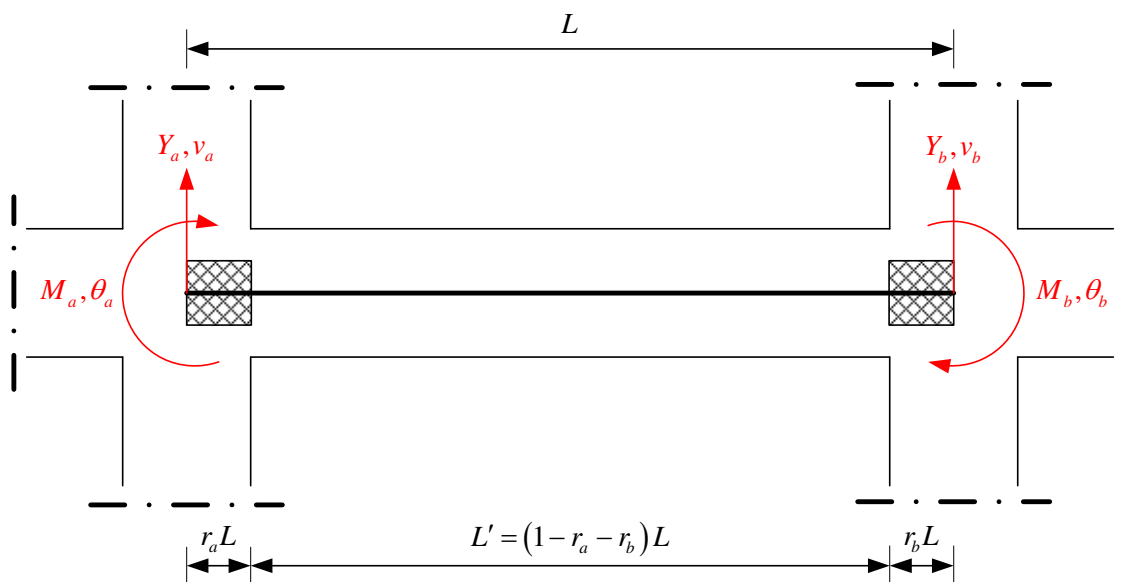
Στην παρούσα έκδοση του προγράμματος, προσομοιώνονται οι εξής τρεις διαφορετικοί τύποι δισδιάστατων δομικών στοιχείων:

- Στοιχείο δοκού,
- Στοιχείο υποστηλώματος,
- Στοιχείο τοιχώματος.

### 7.2.3 Στοιχείο δοκού

Τα στοιχεία δοκού προσομοιώνονται σαν συνεχή καμπικά ελατήρια. Η τέμνουσα παραμόρφωση συνδέεται με καμπικά φαινόμενα μέσω ενός ισοδύναμου ελατηρίου το οποίο θεωρείται ότι δρα εν σειρά με ένα στροφικό ελατήριο. Οι αξονικές παραμορφώσεις

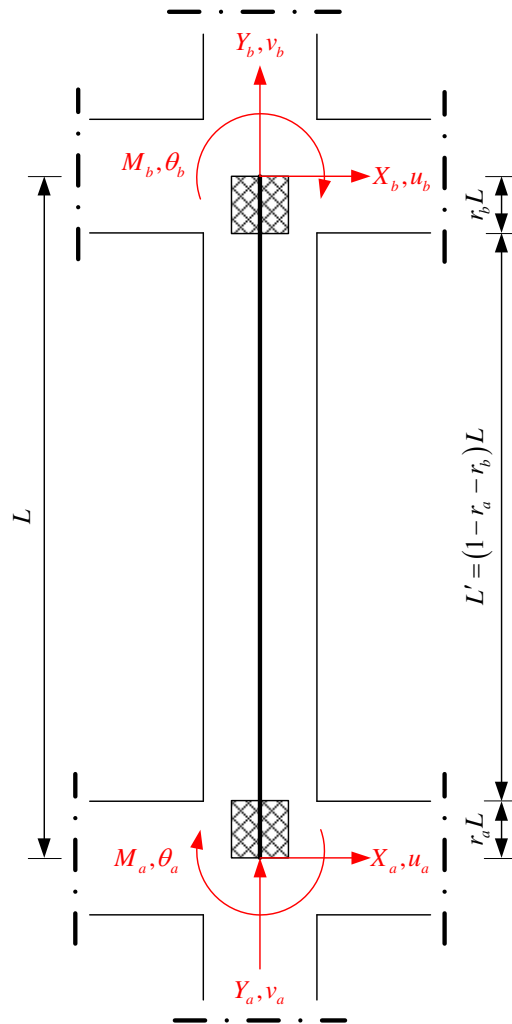
αγνοούνται. Επιπλέον, εισάγονται δύο άκαμπτες ζώνες για κάθε άκρο του στοιχείου προκειμένου να ληφθεί υπόψη η αύξηση της δυσκαμψίας την περιοχή του κόμβου. Ένα τυπικό στοιχείο δοκού με τους βαθμούς ελευθερίας του (κατά τη μητρική στατική) παρουσιάζεται στην Εικόνα 7.2.1:



Εικόνα 7.2.1: Τυπικό στοιχείο δοκού του Plastique

#### 7.2.4 Στοιχείο υποστηλώματος

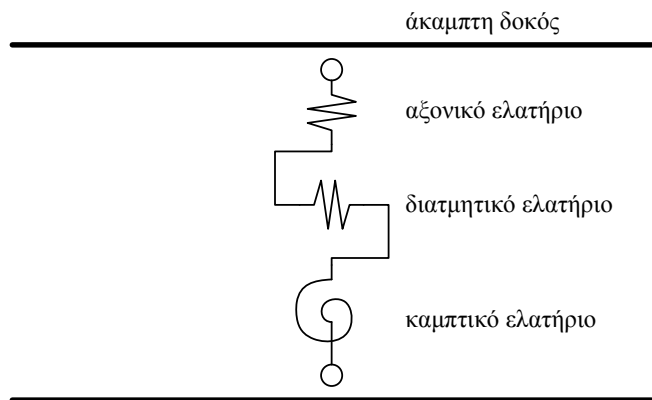
Τα υποστηλώματα προσομοιώνονται κατά τρόπο ταυτόσημο με εκείνον που χρησιμοποιείται για τα στοιχεία δοκού. Η αξονική παραμόρφωση στα υποστηλώματα λαμβάνεται υπόψη, ωστόσο η συσχέτιση της με τη ροπή κάμψης αγνοείται. Ένα τυπικό στοιχείο υποστηλώματος με τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας του (κατά τη μητρική στατική) παρουσιάζεται στην Εικόνα 7.2.2:



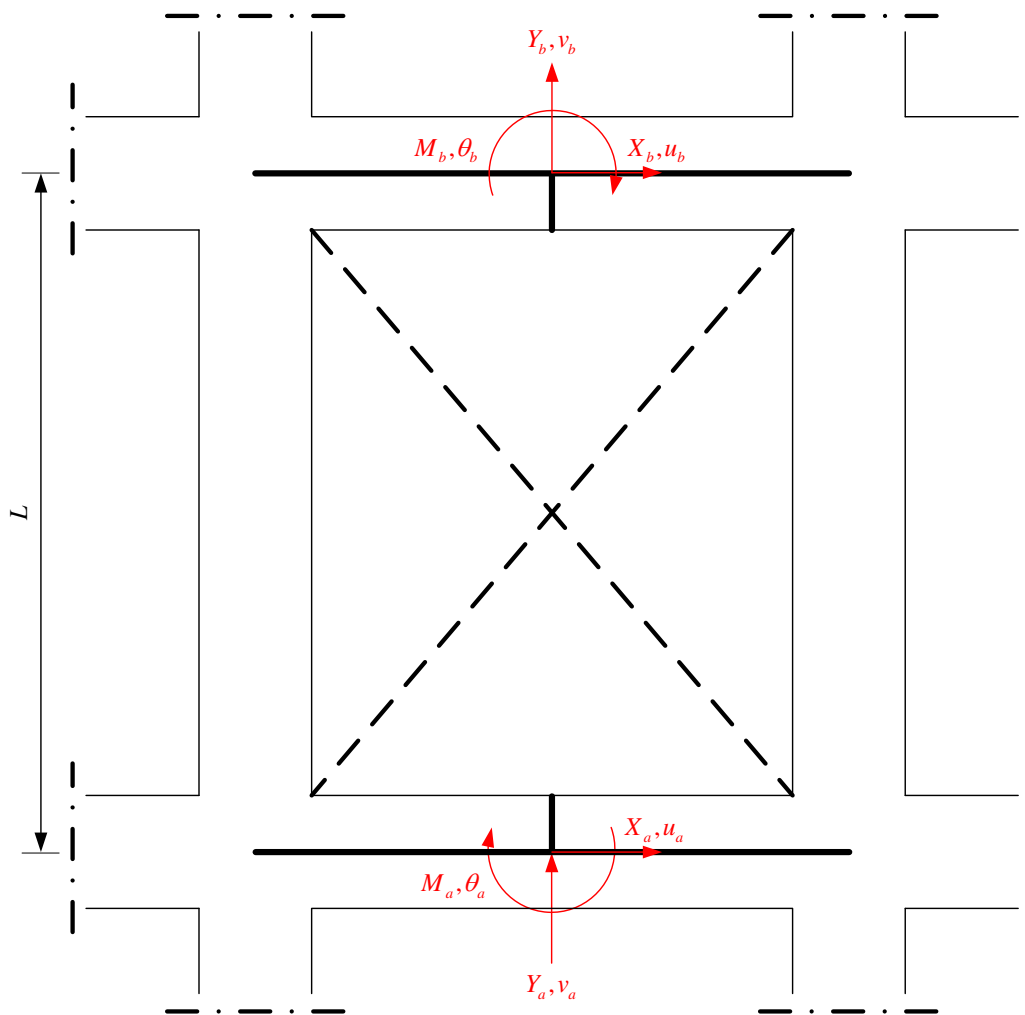
Εικόνα 7.2.2: Τυπικό στοιχείο υποστηλώματος του Plastique

### 7.2.5 Στοιχείο τοιχώματος

Τα στοιχεία τοιχώματος προσομοιώνονται μέσω ενός στροφικού και διατμητικού ελατηρίου τα οποία συνδέονται εν σειρά με το αξονικό ελατήριο (Εικόνα 7.2.3). Η επιπλέον ύπαρξη διατμητικού ελατηρίου οδηγεί σε τροποποίηση του μητρώου ευκαμψίας σε σχέση με εκείνο που αντιστοιχεί σε ραβδωτά στοιχεία. Ένα τυπικό στοιχείο τοιχώματος με τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας του (κατά τη μητρική στατική) παρουσιάζεται στην Εικόνα 7.2.4.



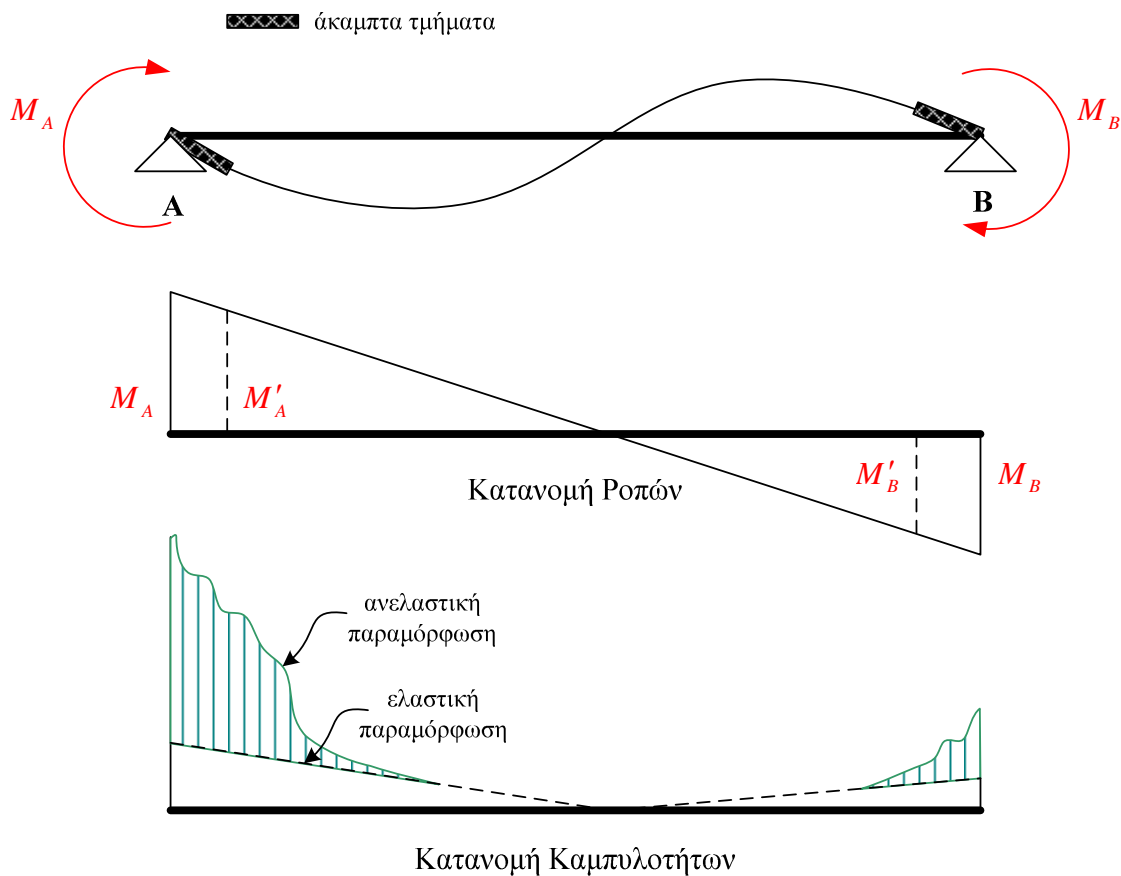
Εικόνα 7.2.3: Προσομοίωση τοιχώματος στο Plastique



Εικόνα 7.2.4: Τυπικό στοιχείο τοιχώματος του Plastique

### 7.2.6 Διανεμημένη πλαστικότητα

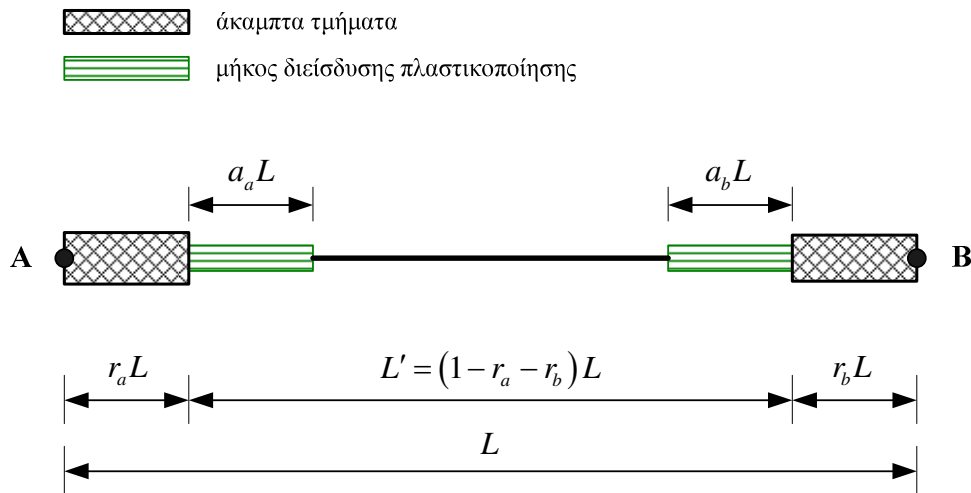
Στην συνέχεια, ο όρος διανεμημένη πλαστικότητα χρησιμοποιείται για την απόδοση του όρου *spread plasticity*, δηλαδή της μεθόδου που κάνει χρήση των ροπών στα άκρα του στοιχείου για τον προσδιορισμό της ευκαμψίας, σε αντιδιαστολή με τον όρο *distributed plasticity* (κατανεμημένη πλαστικότητα), όπου έχουμε υπολογισμό των ροπών κατά μήκος του στοιχείου για τον προσδιορισμό της ευκαμψίας. Θεωρείται ότι η κατανομή της ροπής κατά μήκος ενός στοιχείου είναι γραμμική (Εικόνα 7.2.5). Ενδεχόμενη παρουσία κατανεμημένων φορτίων προκαλεί αλλαγή αυτής της κατανομής και σε περίπτωση ύπαρξης σημαντικών τέτοιων φορτίων θα πρέπει να πραγματοποιηθεί διαίρεση σε επαρκή αριθμό υποστοιχείων.



Εικόνα 7.2.5: Κατανομή ροπής και καμπυλότητας κατά μήκος του στοιχείου

### 7.2.7 Διείδυση της πλαστικοποίησης

Το *Plastique* υπολογίζει τα μήκη διείδυσης της πλαστικοποίησης στα άκρα του εύκαμπτου τμήματος των στοιχείων. Τα μήκη αυτά χαρακτηρίζονται από τις παραμέτρους  $a_A$  και  $a_B$ . Οι παράμετροι αυτές εκφράζουν το ποσοστό του μήκους του στοιχείου όπου η δρώσα ροπή είναι μεγαλύτερη από την ροπή ρηγματώσεως (Εικόνα 7.2.6):



Εικόνα 7.2.6: Μήκη διείδυσης της πλαστικοποίησης

### 7.2.8 Ανάλυση

Για κάθε τύπο ανάλυσης, το προς επίλυση σύστημα παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$[K_\tau]\{\Delta u\} = \{\Delta F\} \quad (7.2.1)$$

όπου  $[K_\tau]$  είναι το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής,  $\{\Delta u\}$  είναι το διάνυσμα των αγνώστων μοναδιαίων επαυξητικών μετατοπίσεων και  $\{\Delta F\}$  είναι το διάνυσμα των εφαρμοζόμενων επαυξητικών φορτίων.

Το πρόγραμμα δίνει τη δυνατότητα ανάλυσης στο επίπεδο (PFRAME2D) ή στο χώρο (PFRAME3D). Για την περίπτωση ανάλυσης στο επίπεδο το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας είναι το μητρώο που προκύπτει με σύνθεση των μητρώων των μελών του επιπέδου



πλαisiού. Για την περίπτωση ανάλυσης στο χώρο το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής προκύπτει με σύνθεση των μητρώων των επί μέρους πλαisiών.

Η μόρφωση του μητρώου δυσκαμψίας γίνεται σε λωριδωτή (banded) μορφή για οικονομία μνήμης. Έτσι, δημιουργείται ένα νέο μητρώο στην πρώτη στήλη του οποίου αποθηκεύονται τα διαγώνια στοιχεία του αρχικού μητρώου, ενώ στις υπόλοιπες στήλες αυτού αποθηκεύονται τα στοιχεία του αρχικού μητρώου που βρίσκονταν άνω της κυρίας διαγωνίου.

Η μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων ισορροπίας είναι η μέθοδος απαλοιφής Gauss για μητρώο δυσκαμψίας γραμμένο σε λωριδωτή μορφή. Η μέθοδος διακρίνεται σε τρία βήματα: (α) τριγωνοποίηση του μητρώου δυσκαμψίας, (β) αντίστοιχη τροποποίηση του διάνυσματος των φορτίων και (γ) πίσω αντικατάσταση. Η δυνατότητα της μεθόδου να τροποποιεί το διάνυσμα των φορτίων ανεξάρτητα από την τριγωνοποίηση του μητρώου δυσκαμψίας συντελεί στην αύξηση της ταχύτητας επίλυσης, όταν το τελευταίο έχει ήδη τριγωνοποιηθεί στην αρχή των επαναλήψεων.

Προκειμένου να μορφωθεί το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας μορφώνονται πρώτα τα επιμέρους μητρώα δυσκαμψίας των στοιχείων. Αυτά τα επί μέρους μητρώα αποθηκεύονται προκειμένου να χρησιμοποιηθούν απ' ευθείας για τον υπολογισμό των ροπών και τεμνουσών στα άκρα του στοιχείου. Για την περίπτωση ανάλυσης στο χώρο χρησιμοποιείται το μητρώο μετάθεσης για τα μητρώα δυσκαμψίας των επί μέρους πλαisiών.

Το διάνυσμα φόρτισης της κατασκευής καθορίζεται ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη μέθοδο. Σε όλες τις περιπτώσεις αναλύσεων υπάρχει η δυνατότητα εφαρμογής επαναληπτικής διαδικασίας μέσα σε κάθε βήμα.

### **7.2.9 Επαναληπτική διαδικασία**

Η επιβολή του φορτίου γίνεται με βήματα, στα οποία η δυσκαμψία θεωρείται σταθερή και ίση με την εφαπτομενική δυσκαμψία στην αρχή του βήματος. Η παραδοχή της σταθερής

δυσκαμψίας είναι τόσο καλύτερη όσο μικρότερα είναι τα βήματα. Για να επιταχυνθεί η διαδικασία χωρίς όμως να δημιουργηθεί μεγάλο σφάλμα εφαρμόζεται μια επαναληπτική διαδικασία μέσα σε κάθε βήμα.

### 7.2.10 Προσομοίωμα Bouc-Wen

Το Plastique έχει την δυνατότητα χρήσης του προσομοιώματος Bouc-Wen. Η ροπή κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$M(t) = M_y \left[ \alpha \frac{\phi(t)}{\phi_y} + (1 - \alpha) z(t) \right] \quad (7.2.2)$$

όπου:

- $M(t)$  η ροπή,
- $M_y$  η ροπή διαρροής,
- $\alpha$  ο λόγος της μετελαστικής δυσκαμψίας προς την αρχική,
- $\phi_y$  η καμπυλότητα διαρροής,
- $z(t)$  η υστερητική παράμετρος, η οποία ακολουθεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\dot{z}(t) = f(\dot{\phi}(t), z(t)) \frac{1}{\phi_y} \quad (7.2.3)$$

όπου:

$$f(\dot{\phi}, z) = A\dot{\phi} - B \frac{\dot{\phi} + |\dot{\phi}| \left( \frac{|z| + z}{2} \right)^{n_b}}{2} - C \frac{\dot{\phi} + |\dot{\phi}| \left( \frac{|z| - z}{2} \right)^{n_c}}{2} - \quad (7.2.4)$$

$$- D \frac{\dot{\phi} - |\dot{\phi}| \left( \frac{|z| + z}{2} \right)^{n_d}}{2} - E \frac{\dot{\phi} - |\dot{\phi}| \left( \frac{|z| - z}{2} \right)^{n_e}}{2}$$

όπου  $A, B, C, D, E$  παράμετροι οι οποίες ελέγχουν την μορφή των υστερητικών βρόχων ανά κλάδο. Έτσι, το προσομοίωμα αυτό μπορεί να αντιμετωπίσει περιπτώσεις ασύμμετρης απόκρισης κατά την θετική και την αρνητική κατεύθυνση φόρτισης.

Η δυσκαμψία δίνεται από την σχέση:

$$K = EI = \frac{dM}{d\phi} = M_y \left[ \alpha \frac{1}{\phi_y} + (1-\alpha) \frac{dz}{d\phi} \right] \quad (7.2.5)$$

Από την διαφορική εξίσωση (7.2.3) προκύπτει:

$$\frac{dz}{d\phi} = K_z \frac{1}{\phi_y} \quad (7.2.6)$$

όπου:

$$K_z = \left[ A - B \frac{1 + \operatorname{sgn}(d\phi)}{2} \left( \frac{|z| + z}{2} \right)^{n_B} - C \frac{1 + \operatorname{sgn}(d\phi)}{2} \left( \frac{|z| - z}{2} \right)^{n_C} - \right. \\ \left. - D \frac{1 - \operatorname{sgn}(d\phi)}{2} \left( \frac{|z| + z}{2} \right)^{n_D} - E \frac{1 - \operatorname{sgn}(d\phi)}{2} \left( \frac{|z| - z}{2} \right)^{n_E} \right] \quad (7.2.7)$$

### 7.2.11 Μείωση της αντοχής και της δυσκαμψίας

Το προσομοίωμα Bouc-Wen έχει επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει τα φαινόμενα μείωσης της αντοχής και της δυσκαμψίας. Η μείωση της δυσκαμψίας λαμβάνεται υπόψη εισάγοντας την παράμετρο  $\eta$  στην διαφορική εξίσωση του προσομοιώματος:

$$\dot{z}(t) = \frac{f(\dot{\phi}(t), z(t))}{\eta} \frac{1}{\phi_y} \quad (7.2.8)$$

Η δυσκαμψία δίνεται από την σχέση:

$$K = EI_0 \left[ \alpha + (1-\alpha) \frac{K_z}{\eta} \right] \quad (7.2.9)$$

Η παράμετρος  $\eta$  υπολογίζεται με βάση την τρέχουσα πλαστιμότητα  $\mu = \phi/\phi_y$  και την μέγιστη απαιτηθείσα πλαστιμότητα  $\mu_{\max} = \phi_{\max}/\phi_y$  πριν την έναρξη της αποφόρτισης. Η σχέση υπολογισμού είναι:

$$\eta = 1.0 + S_k \frac{\mu_{\max} + \mu}{2} \quad (7.2.10)$$

όπου  $S_k$  είναι μια παράμετρος ελέγχου της επιρροής της πλαστιμότητας στην μείωση της δυσκαμψίας.

Η μείωση της αντοχής λαμβάνεται υπόψη πολλαπλασιάζοντας την ροπή διαρροής  $M_y$  με έναν μειωτικό συντελεστή  $S_\beta$ :

$$M(t) = S_\beta M_y \left[ \alpha \frac{\phi(t)}{\phi_y} + (1 - \alpha) z(t) \right] \quad (7.2.11)$$

Ο μειωτικός συντελεστής  $S_\beta$  εξαρτάται από την συσσωρευμένη βλάβη στην διατομή. Η ποσοτικοποίηση της βλάβης γίνεται με την βοήθεια του δείκτη βλάβης DI (damage index):

$$S_\beta = 1 - S_d DI \quad (7.2.12)$$

Ο δείκτης  $S_d$  καθορίζει τη επίδραση του δείκτη βλάβης στην μείωση της αντοχής. Ο δείκτης βλάβης υπολογίζεται ως εξής:

$$DI = \frac{\mu_{\max} - 1}{\mu_c - 1} \frac{1}{\left( 1 - \frac{S_{p1} \int dE_{diss}}{4E_{mon}} \right)^{S_{p2}}} \quad (7.2.13)$$

όπου:

- $\mu_c$  η μέγιστη πλαστιμότητα που μπορεί να αναπτύξει η διατομή, δηλαδή  $\mu_c = \phi_u / \phi_y$ ,
- $S_{p1}$ ,  $S_{p2}$  παράμετροι ελέγχου.

Το ολοκλήρωμα  $\int dE_{diss}$  αντιπροσωπεύει την αναλισκόμενη υστερητική ενέργεια. Ο υπολογισμός της γίνεται αφαιρώντας από την συνολική απορροφηθείσα ενέργεια  $E_{tot}$  την ελαστική ενέργεια  $E_{el}$ . Η συνολική ενέργεια υπολογίζεται αθροίζοντας τις στοιχειώδεις ενέργειες που απορροφώνται σε κάθε βήμα υπολογισμού, δηλαδή:

$$E_{tot} = \sum \bar{M} \Delta\phi \quad (7.2.14)$$

όπου  $\bar{M}$  είναι η μέση τιμή της ροπής. Η ελαστική ενέργεια υπολογίζεται από την σχέση:

$$E_{el} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{K} \quad (7.2.15)$$

όπου  $K$  είναι η δυσκαμψία κατά την αποφόρτιση. Έτσι, η αναλίσκόμενη ενέργεια υπολογίζεται από την σχέση:

$$E_{diss} = E_{tot} - E_{el} \quad (7.2.16)$$

Τέλος, η ενέργεια  $E_{mon}$  αντιπροσωπεύει την μέγιστη ενέργεια που μπορεί να απορροφηθεί σε μια μονοτονική φόρτιση έως την αστοχία:

$$E_{mon} = M_y \phi_y (\mu_c - 1) \quad (7.2.17)$$

### 7.2.12 Στένωση του διαγράμματος ροπών - καμπυλοτήτων

Το φαινόμενο της στένωσης του διαγράμματος ροπών - καμπυλοτήτων λαμβάνεται υπόψη εισάγοντας την παράμετρο ολίσθησης (slip-length parameter)  $a$  και την συνάρτηση  $f(z)$  στην έκφραση του  $K_z$ :

$$K_z^{pin} = \frac{K_z}{1 + a f(z) K_z} \quad (7.2.18)$$

όπου η δυσκαμψία  $K_z$  δίνεται από την σχέση (7.2.7) ενώ οι  $a$ ,  $f(z)$  δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$a = A_s (\mu' - 1) \quad (7.2.19)$$

$$f(z) = \exp \left[ -\frac{(z - z_m)^2}{z_s^2} \right] \quad (7.2.20)$$

όπου  $\mu'$  είναι η κανονικοποιημένη καμπυλότητα αντιστοιχούσα στο σημείο αντιστροφής της φόρτισης πριν τον τρέχοντα κύκλο φόρτισης και  $A_s$ ,  $z_m$ ,  $z_s$  παράμετροι ελέγχου.

### 7.2.13 Δείκτης βλάβης

Ο δείκτης βλάβης  $DI$  λαμβάνει ταυτόχρονα υπόψη του την επιρροή της μέγιστης απαιτηθείσας πλαστιμότητας και της συνολικής αναλίσκόμενης ενέργειας, ώστε να ποσοτικοποιήσει την συνολική βλάβη στην διατομή. Ο δείκτης αυτός επεκτείνεται για ολόκληρο το στοιχείο με βάση τους δείκτες βλάβης  $DI_a$ ,  $DI_b$  των δύο ακραίων διατομών. Συγκεκριμένα λαμβάνεται ο μεγαλύτερος από τους δύο δείκτες:

$$DI_i = \max\{DI_a, DI_b\} \quad (7.2.21)$$

Ο λόγος που εφαρμόζεται αυτή η σχέση έναντι κάποιας σχέσης που θα συνδυάζε και τους δύο δείκτες ταυτόχρονα, όπως γίνεται για τον δείκτη βλάβης της κατασκευής, είναι ότι έχει παρατηρηθεί ότι ολόκληρο το στοιχείο μπορεί να αστοχήσει μετά από σοβαρή βλάβη μιας μόνο διατομής του.

Ο δείκτης βλάβης της κατασκευής υπολογίζεται συνδυάζοντας τους δείκτες βλάβης των στοιχείων του. Η συμμετοχή της βλάβης του κάθε στοιχείου στην βλάβη του φορέα εξαρτάται από την ενέργεια  $E_{tot,i}$  που έχει συνολικά απορροφηθεί στο στοιχείο σύμφωνα με την σχέση:

$$DI = \sum_i \lambda_i DI_i \quad (7.2.22)$$

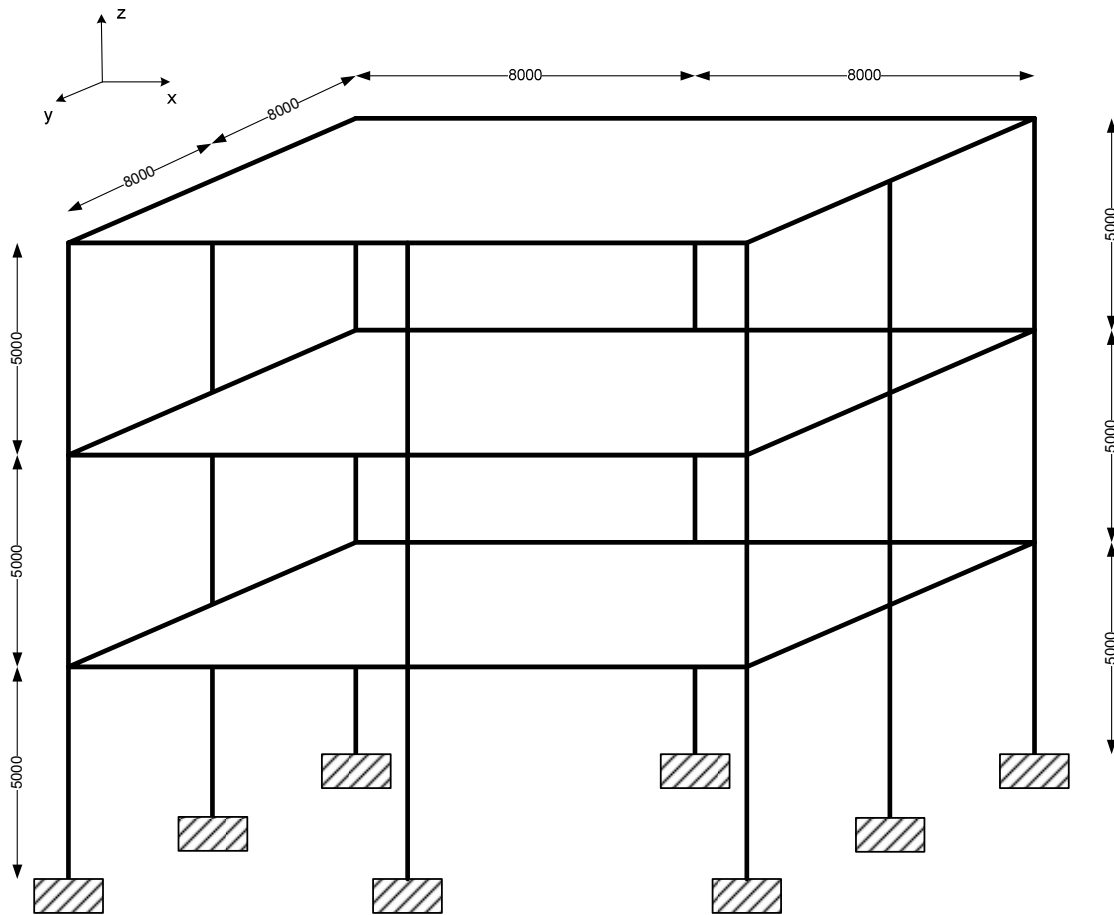
όπου:

$$\lambda_i = \frac{E_{tot,i}}{\sum_i E_{tot,i}} \quad (7.2.23)$$

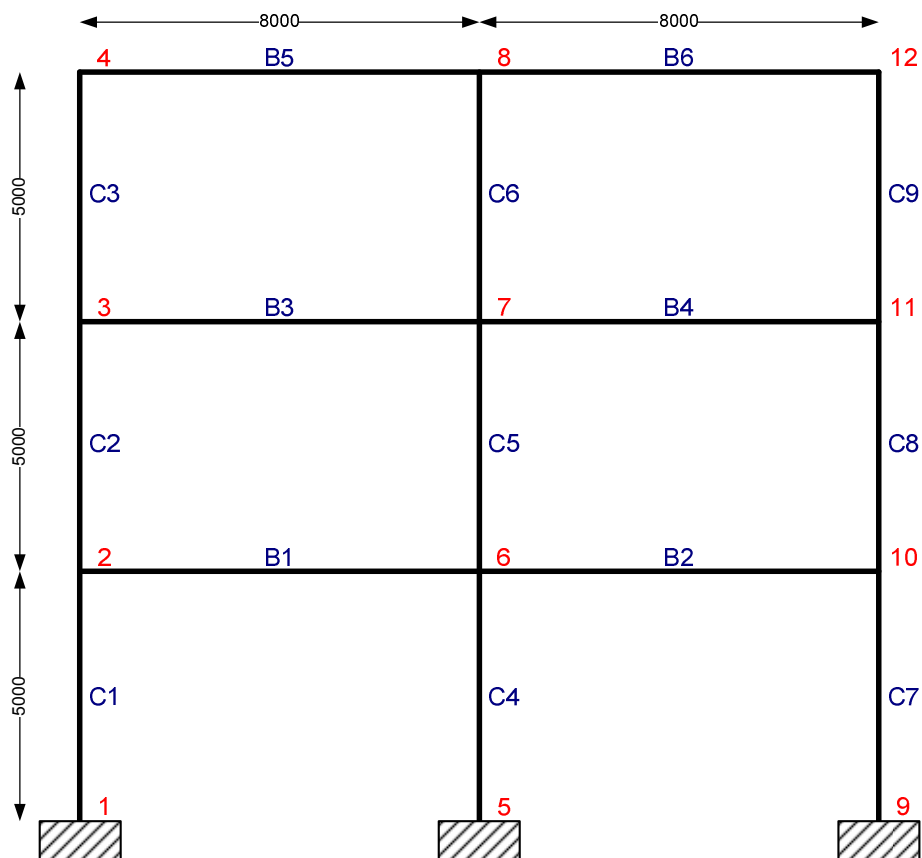
## 7.3 Εφαρμογή

Ως εφαρμογή, επιλύθηκε σε δυναμική ανάλυση ένας τρισδιάστατος φορέας ο οποίος περιλαμβάνει δύο όμοια τριώροφα τρίστυλα πλαίσια ανά διεύθυνση (Εικόνα 7.3.1). Το βασικό δισδιάστατο πλαίσιο φαίνεται στην Εικόνα 7.3.2, ενώ οι διατομές των

υποστηλωμάτων και των δοκών παρουσιάζονται στην συνέχεια (Εικόνα 7.3.3 ως Εικόνα 7.3.9). Ο Πίνακας 7.3.1 συνοψίζει τις ιδιότητές των μελών.



**Εικόνα 7.3.1: Τρισδιάστατος φορέας (διαστάσεις σε mm)**

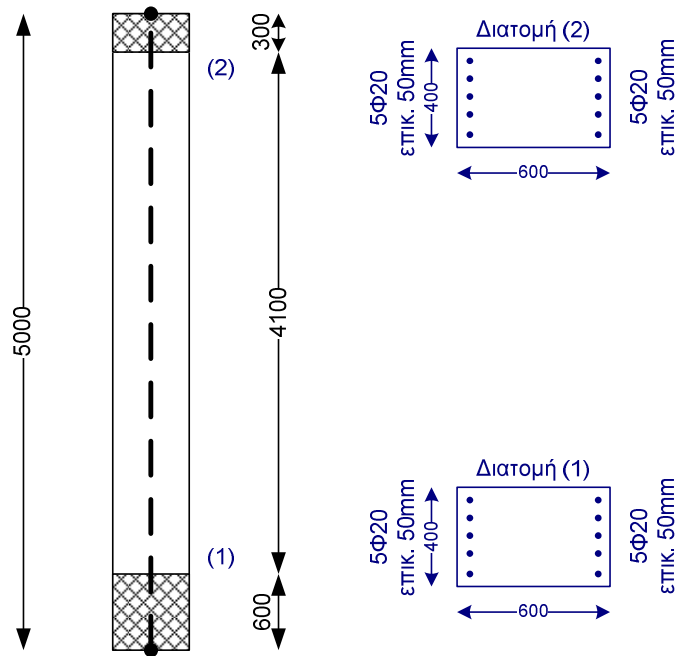


Εικόνα 7.3.2: Βασικός διαστάσιμος φορέας – τριώντορο τριώροφο πλαίσιο (διαστάσεις σε mm)

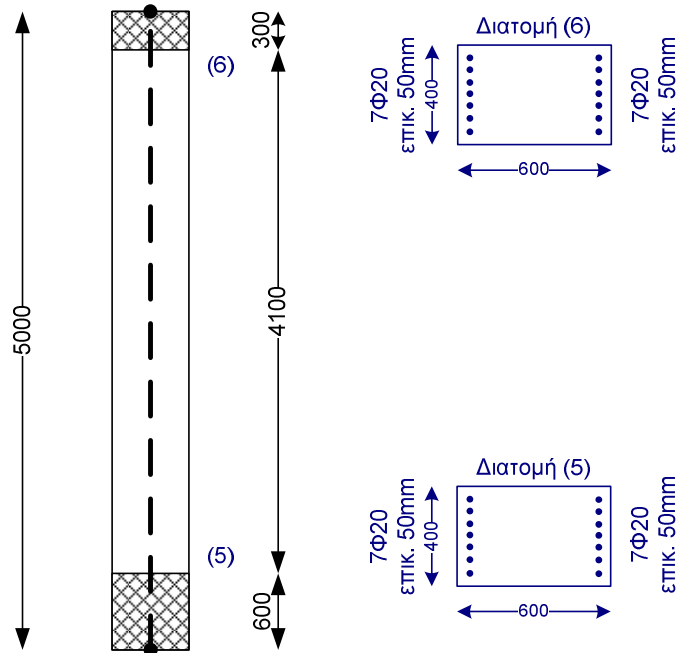
Διατομή	Αξ. φορτίο [kN]	Ύψος [mm]	Πλάτος [mm]	Επικάλυψη [mm]	Διαμήκης Οπλισμός
Υποστυλώμα C <sub>4</sub>					
Κάτω	500	600	400	50	7Φ20 (συμ.)
Άνω	500	600	400	50	7Φ20 (συμ.)
Υποστυλώματα C <sub>1</sub> , C <sub>5</sub> , C <sub>7</sub>					
Κάτω	500	600	400	50	5Φ20 (συμ.)
Άνω	500	600	400	50	5Φ20 (συμ.)
Υποστυλώματα C <sub>2</sub> , C <sub>3</sub> , C <sub>6</sub> , C <sub>8</sub> , και C <sub>9</sub>					
Κάτω	500	600	400	50	5Φ16 (συμ.)
Άνω	500	600	400	50	5Φ16 (συμ.)
Δοκοί B <sub>1</sub> ως B <sub>6</sub>					
Αριστερά	-	600	250	50	3Φ16 άνω / κάτω
Δεξιά	-	600	250	50	3Φ16 άνω / κάτω

Πίνακας 7.3.1: Ιδιότητες μελών τριώροφου πλαισίου

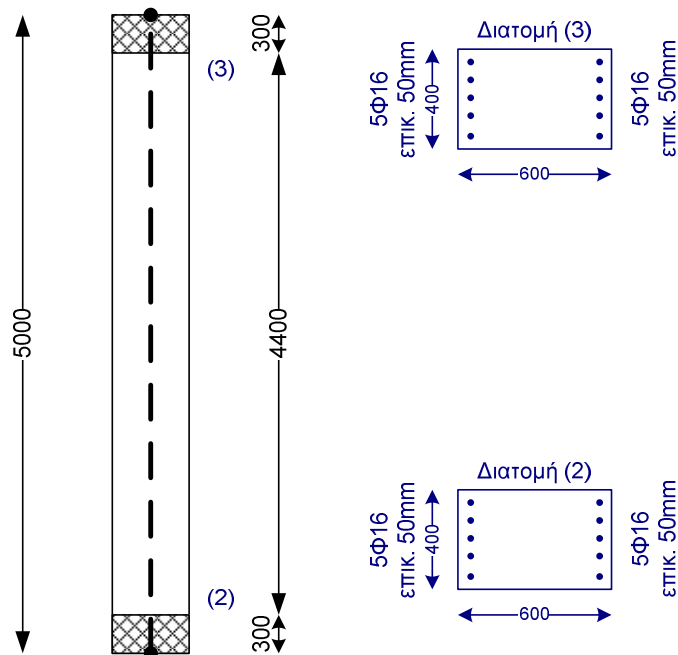




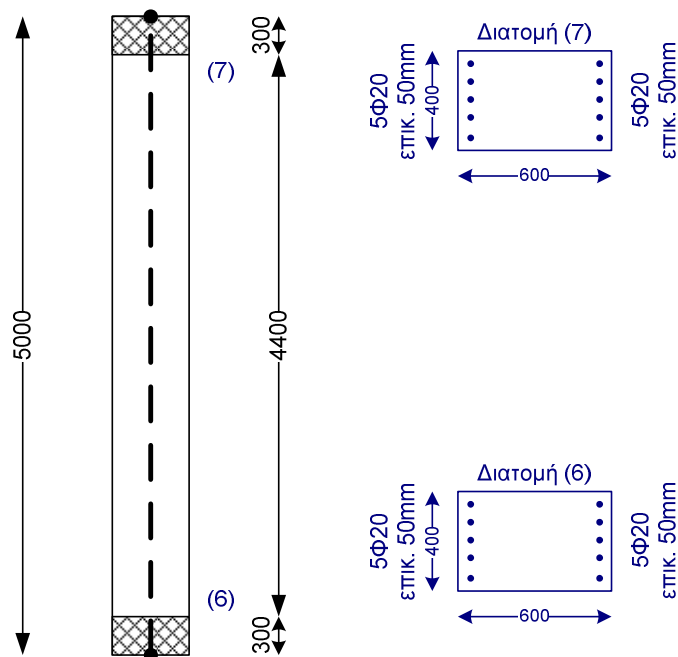
Εικόνα 7.3.3: Διατομή υποστηλωμάτων C1 και C7 (διαστάσεις σε mm)



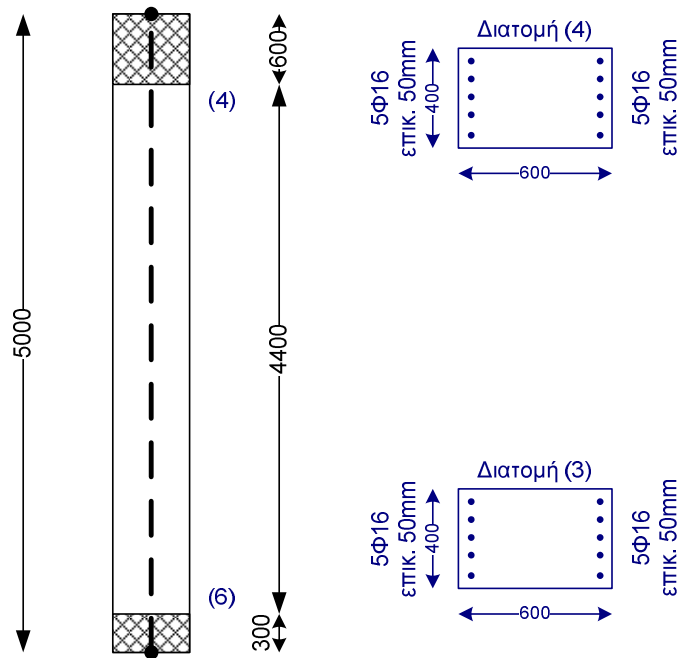
Εικόνα 7.3.4: Διατομή υποστηλώματος C4 (διαστάσεις σε mm)



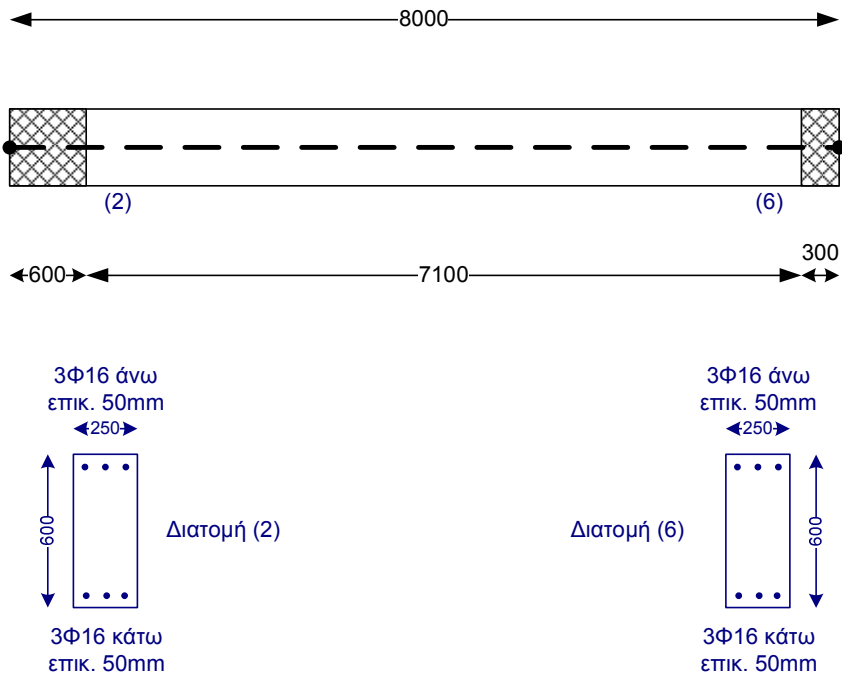
Εικόνα 7.3.5: Διατομή υποστηλωμάτων C2 και C8 (διαστάσεις σε mm)



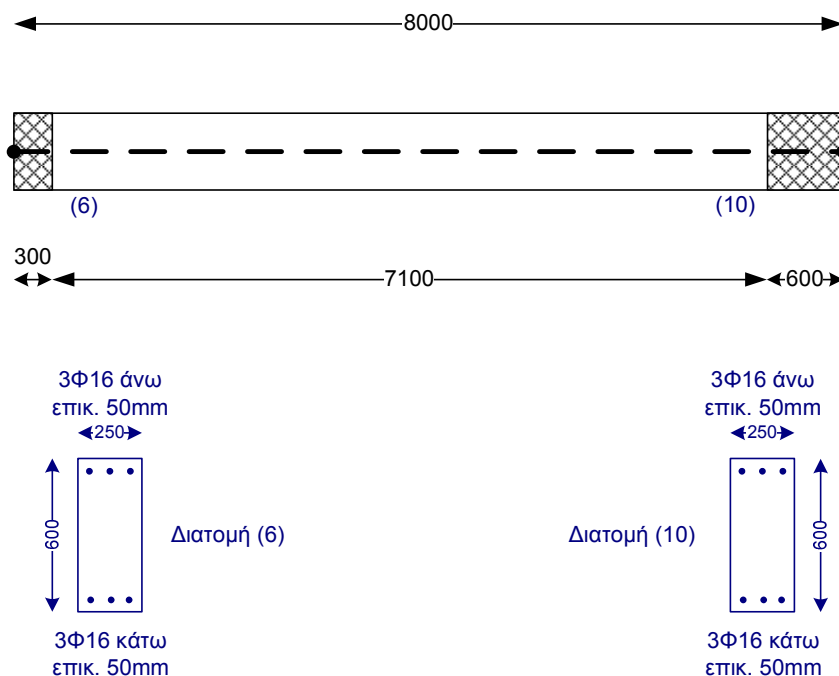
Εικόνα 7.3.6: Διατομή υποστηλώματος C5 (διαστάσεις σε mm)



Εικόνα 7.3.7: Διατομή υποστηλωμάτων C3, C6 και C9 (διαστάσεις σε mm)



Εικόνα 7.3.8: Διατομή δοκών B1, B3 και B5 (διαστάσεις σε mm)



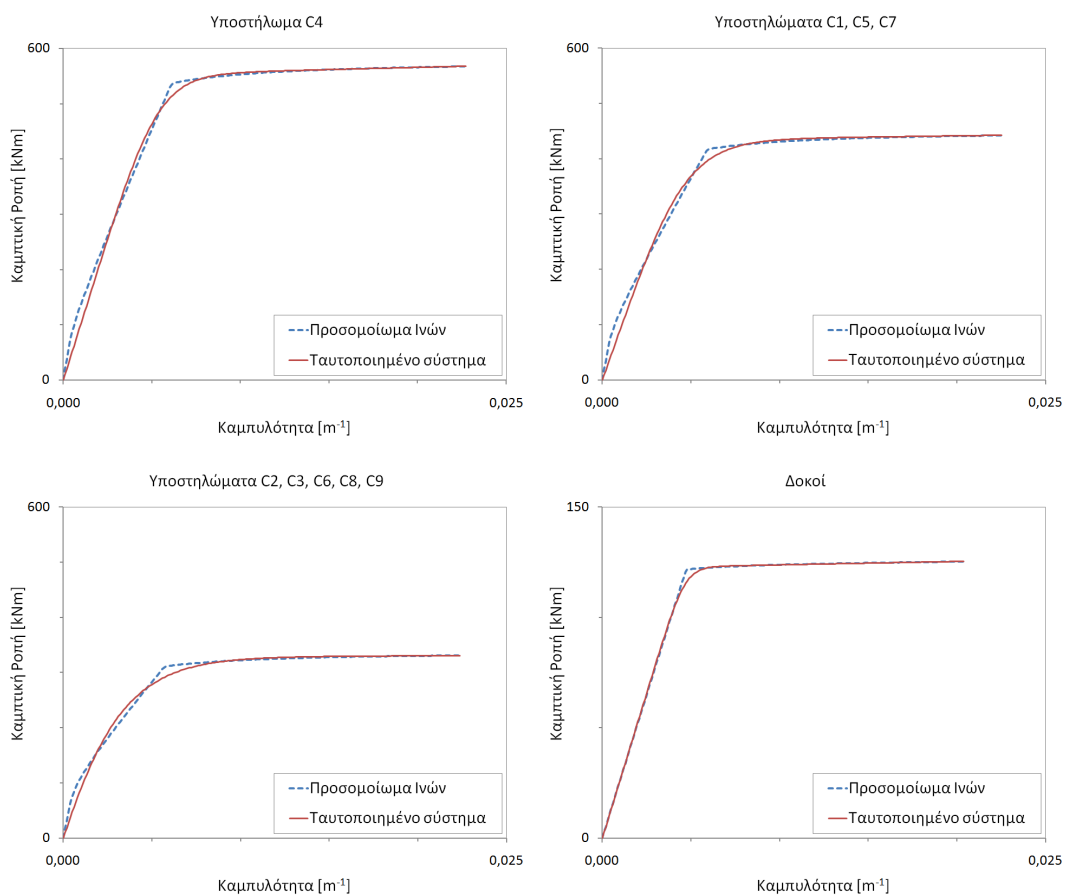
**Εικόνα 7.3.9: Διατομή δοκών B2, B4 και B6 (διαστάσεις σε mm)**

Πραγματοποιήθηκε ταυτοποίηση των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen με βάση μοντέλα ινών και σύμφωνα με την §6.8.5. Τα αποτελέσματα ποικίλλουν ανάλογα τις διαστάσεις, τον οπλισμό και την αξονική δύναμη των διατομών. Ο Πίνακας 7.3.2 συνοψίζει τα αποτελέσματα της ταυτοποίησης ενώ η Εικόνα 7.3.10 παρουσιάζει τα αντίστοιχα διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων. Ως αντικειμενική συνάρτηση του αλγόριθμου ταυτοποίησης χρησιμοποιήθηκε το άθροισμα των τετραγώνων του σφάλματος της καμπτικής ροπής. Παρατηρώντας ότι το βήμα υπολογισμού της καμπυλότητας είναι σταθερό προκύπτει ότι, ισοδύναμα, η διαδικασία ταυτοποίησης ελαχιστοποιεί το σφάλμα της απορροφηθείσας ενέργειας κατά την μονοτονική φόρτιση. Σε κάθε περίπτωση τέθηκε  $\beta = \gamma = 0.5$  ώστε η αποφόρτιση να γίνεται με δυσκαμψία ίση με την αρχική.

Σημειώνεται ότι για την ανάδειξη των διαφορών στην απόκριση μεταξύ αρχικού και τροποποιημένου μοντέλου, δεν χρησιμοποιήθηκε κάποιος μηχανισμός μείωσης της αντοχής, μείωσης της δυσκαμψίας ή στένωσης.

Μέλος	$a$ ( $\times 10^{-3}$ )	$n$	$M_y$ [kNm]	$\Phi_y$ [ $\times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ ]
$C_1, C_5, C_7$	4.888	3.144	434.644	4.808
$C_4$	7.820	4.516	553.758	5.416
$C_2, C_3, C_6, C_8$ και $C_9$	0.978	1.481	328.635	3.424
$B_1$ ως $B_6$	5.865	10.000	121.901	4.682

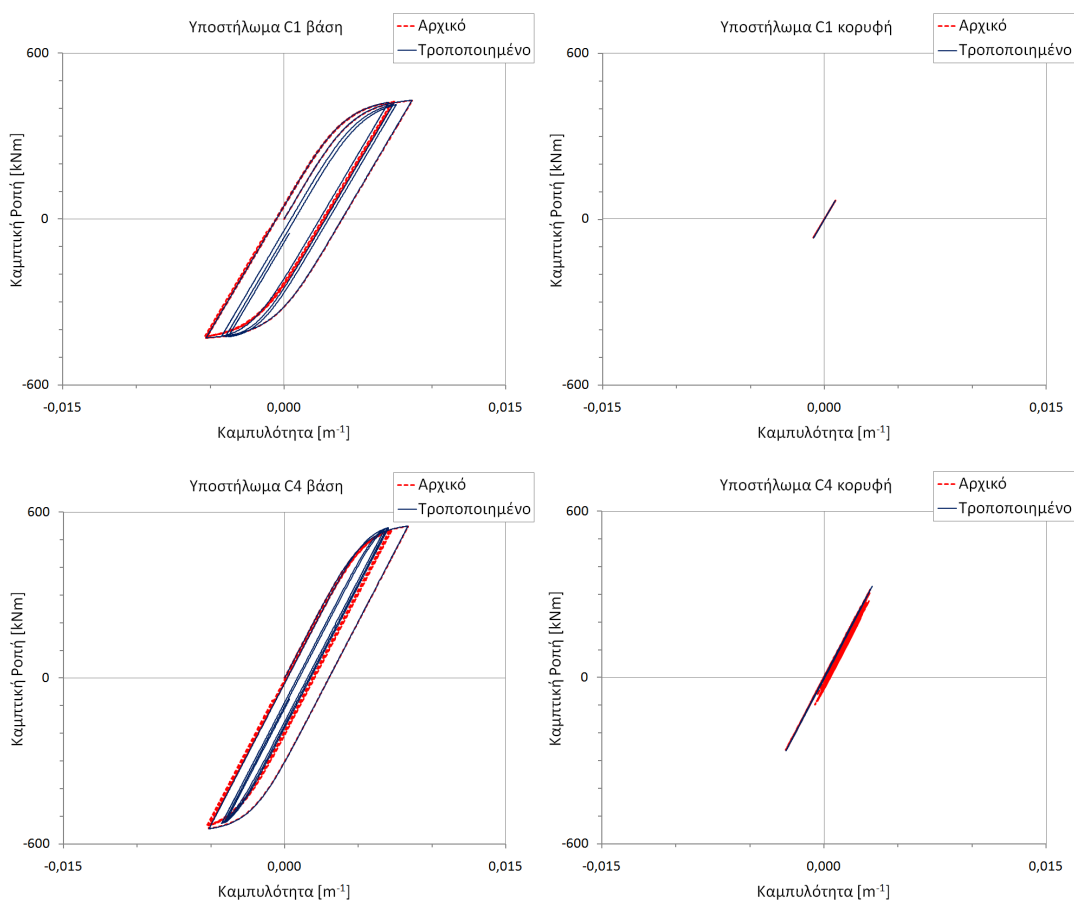
**Πίνακας 7.3.2: Ταυτοποιημένες τιμές παραμέτρων προσομοιώματος Bouc-Wen**



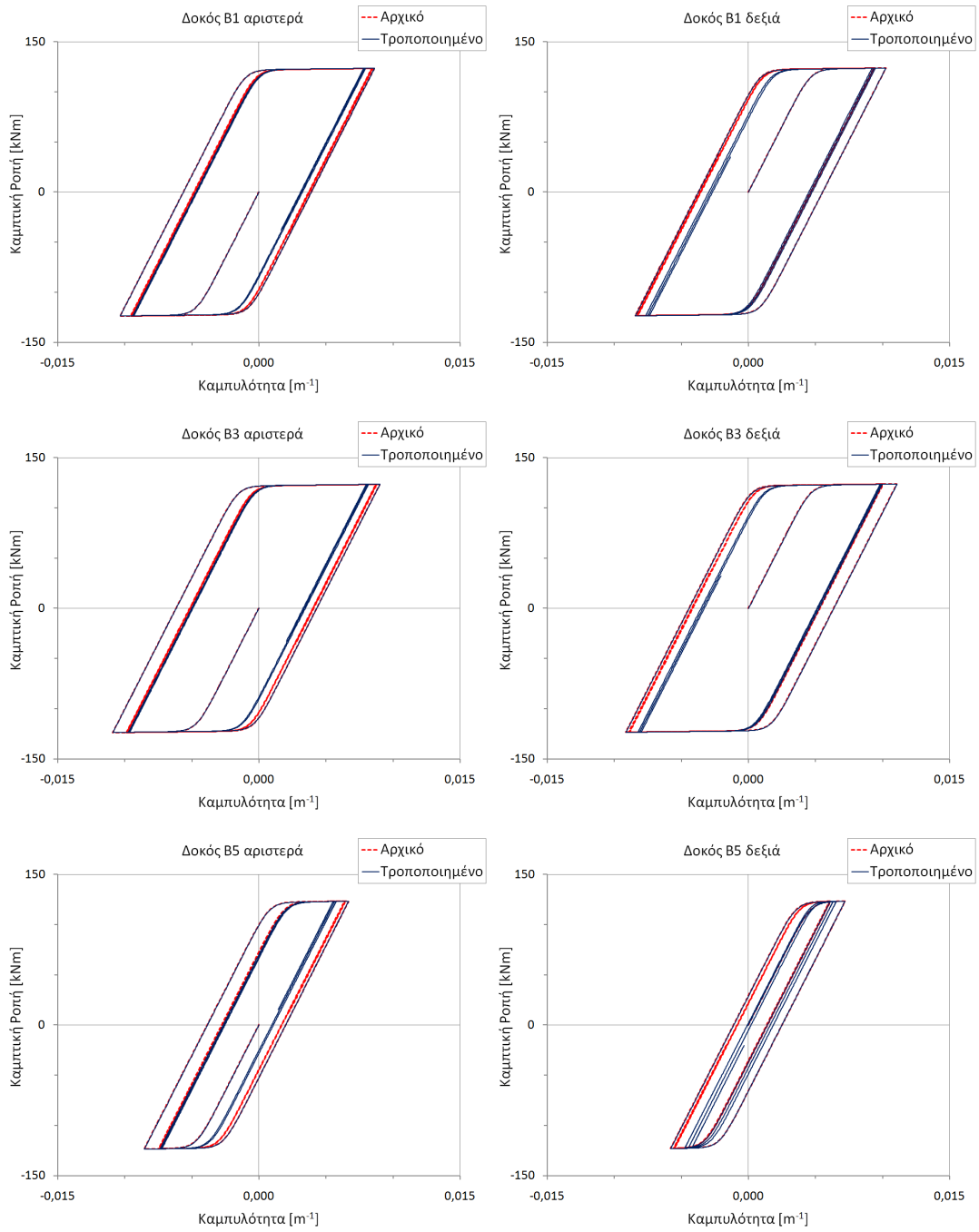
**Εικόνα 7.3.10: Ταυτοποίηση παραμέτρων προσομοιώματος Bouc-Wen για μονοτονική φόρτιση**

### 7.3.1 Ημιτονοειδής φόρτιση

Ο φορέας υποβλήθηκε σε ημιτονοειδή επιτάχυνση εδάφους με μέγιστη τιμή  $u_g^{\max} = 0.5g$  και μεγάλη περίοδο  $T = 10s$ . Η κατεύθυνση της φόρτισης συμπίπτει με τον έναν άξονα συμμετρίας του φορέα. Στην Εικόνα 7.3.11 φαίνεται η απόκριση των υποστηλωμάτων C1 και C4 καθώς και των δοκών B1, B3, και B5. Η απόκριση των υπολοίπων υποστηλωμάτων της ανωδομής είναι σχεδόν γραμμική και δεν παρουσιάζεται.



Εικόνα 7.3.11: Απόκριση τριδιάστατου τριώροφου πλαισίου, ημιτονοειδής φόρτιση



**Εικόνα 7.3.11: Απόκριση τρισδιάστατου τριώροφου πλαισίου, ημιτονοειδής φόρτιση (συνέχεια)**

### 7.3.2 Northridge Tarzana Cedar Hill 090 [84]

Τα αποτελέσματα για την σεισμική διέγερση Northridge Tarzana Cedar Hill 090 [84] παρουσιάζονται στην Εικόνα 7.3.12. Σε αντίθεση με την απλή ημιτονοειδή φόρτιση, σε αυτή την περίπτωση δείχνεται ότι οι διαφορές είναι σημαντικές. Επιπλέον, οι παρακάτω πίνακες παρουσιάζουν την διαδοχή των διαρροών των μελών για το αρχικό και το τροποποιημένο προσομοίωμα. Παρατηρείται ότι, σε αντίθεση με το αρχικό, στο τροποποιημένο προσομοίωμα διαρρέουν τα υποστυλώματα C4, C1 και C7. Επιπλέον, η σειρά και η χρονική στιγμή της διαρροής των δοκών είναι διαφορετική.

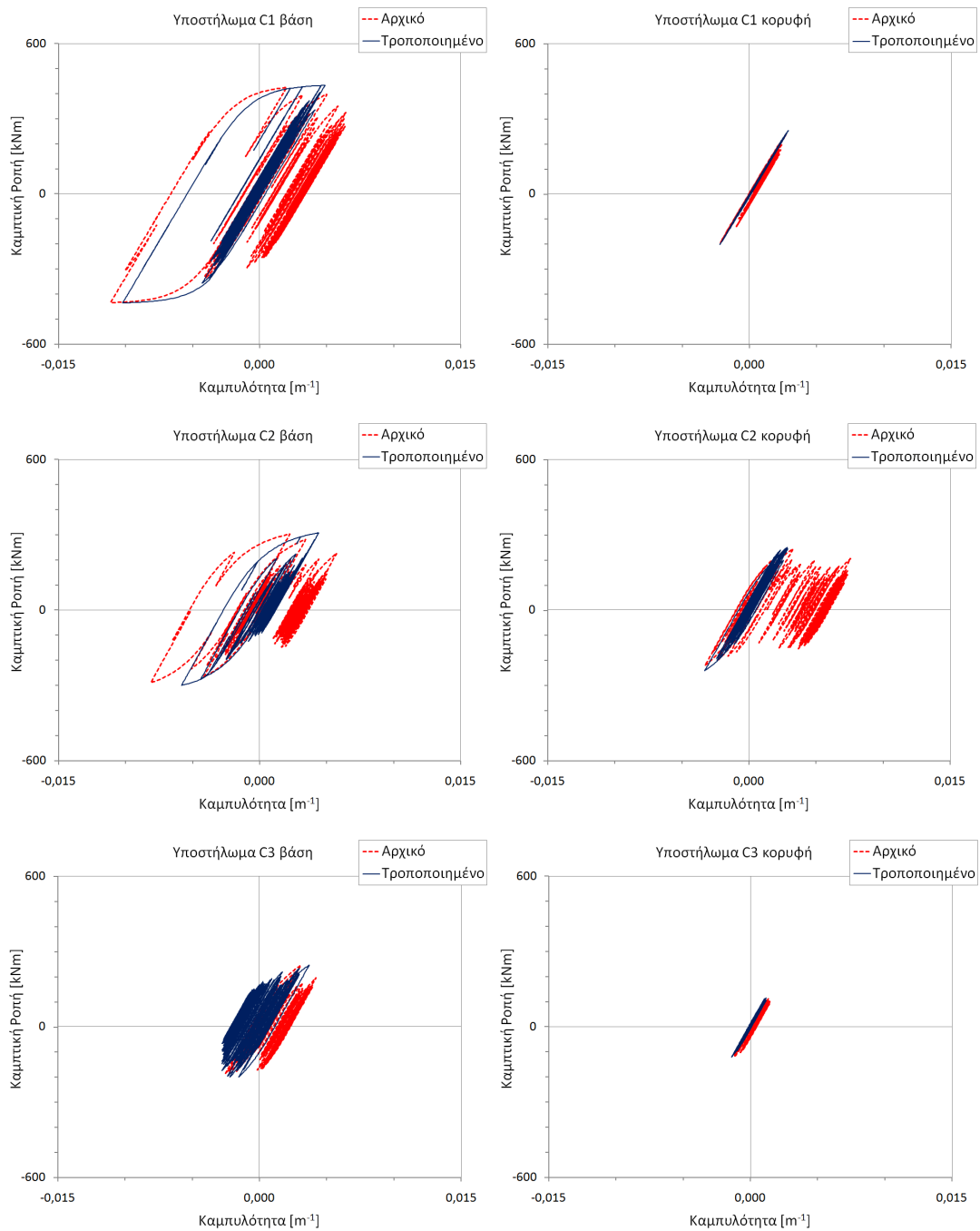
TIME	T=	7.62360	SEC	:	BEAM	ELEMENT	5	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	7.62860	SEC	:	BEAM	ELEMENT	6	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	7.63200	SEC	:	BEAM	ELEMENT	3	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	7.63860	SEC	:	BEAM	ELEMENT	4	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	7.96860	SEC	:	BEAM	ELEMENT	6	YIELDED	AT	SECOND	END
TIME	T=	7.98060	SEC	:	BEAM	ELEMENT	5	YIELDED	AT	SECOND	END
TIME	T=	8.19040	SEC	:	BEAM	ELEMENT	2	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	8.19180	SEC	:	BEAM	ELEMENT	1	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	8.59740	SEC	:	BEAM	ELEMENT	2	YIELDED	AT	SECOND	END
TIME	T=	8.60540	SEC	:	BEAM	ELEMENT	1	YIELDED	AT	SECOND	END
TIME	T=	8.61160	SEC	:	BEAM	ELEMENT	4	YIELDED	AT	SECOND	END
TIME	T=	8.61400	SEC	:	BEAM	ELEMENT	3	YIELDED	AT	SECOND	END

**Πίνακας 7.3.3: Διαδοχή διαρροών μελών αρχικού προσομοιώματος Bouc-Wen**

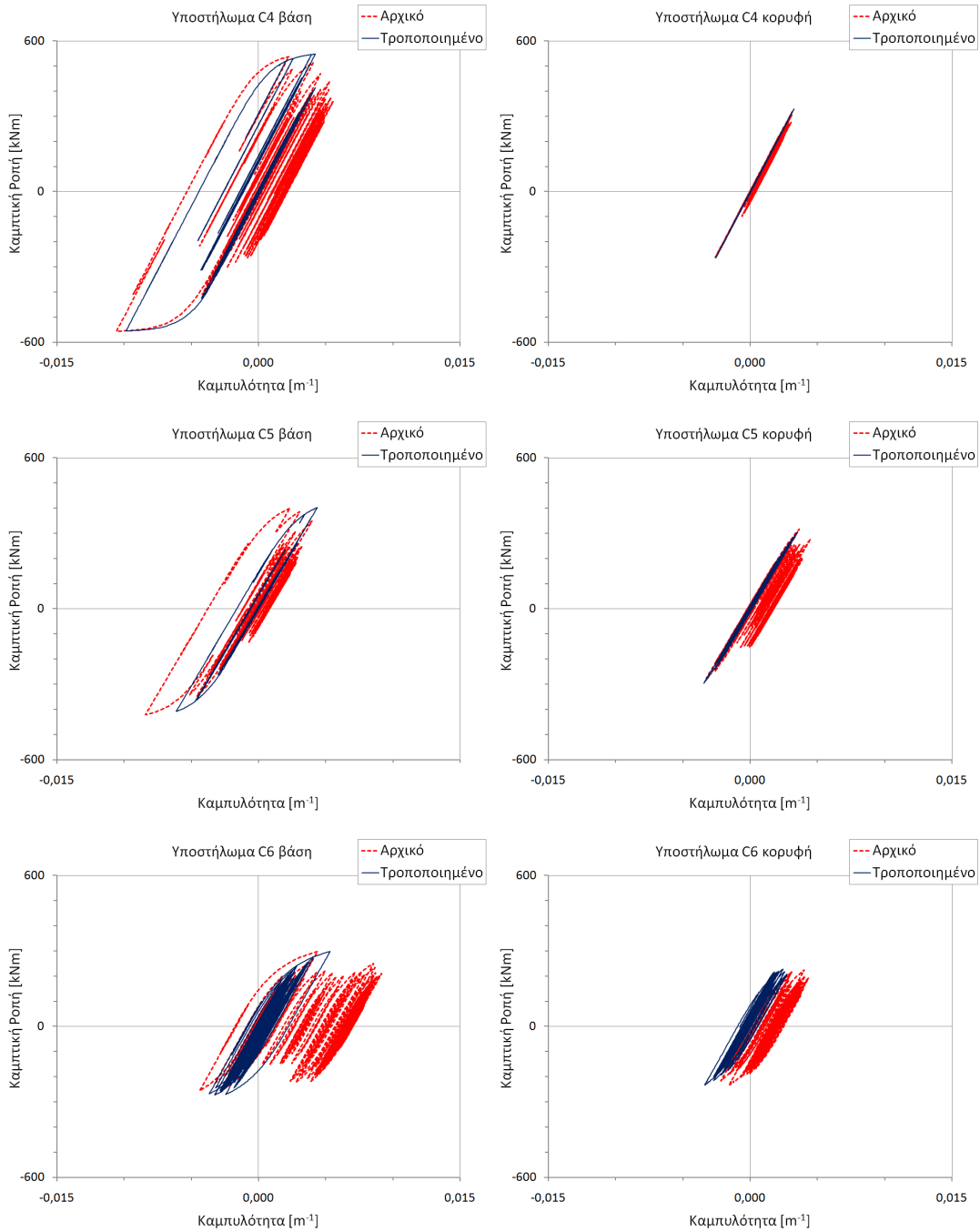
TIME	T=	5.37060	SEC	:	BEAM	ELEMENT	1	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	7.61960	SEC	:	BEAM	ELEMENT	5	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	7.62460	SEC	:	BEAM	ELEMENT	6	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	7.62860	SEC	:	BEAM	ELEMENT	3	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	7.63340	SEC	:	BEAM	ELEMENT	4	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	7.95860	SEC	:	BEAM	ELEMENT	6	YIELDED	AT	SECOND	END
TIME	T=	7.96740	SEC	:	BEAM	ELEMENT	5	YIELDED	AT	SECOND	END
TIME	T=	8.18040	SEC	:	BEAM	ELEMENT	2	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	8.22160	SEC	:	COLUMN	ELEMENT	4	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	8.22440	SEC	:	COLUMN	ELEMENT	1	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	8.22440	SEC	:	COLUMN	ELEMENT	7	YIELDED	AT	FIRST	END
TIME	T=	8.59520	SEC	:	BEAM	ELEMENT	2	YIELDED	AT	SECOND	END
TIME	T=	8.59840	SEC	:	BEAM	ELEMENT	4	YIELDED	AT	SECOND	END
TIME	T=	8.59860	SEC	:	BEAM	ELEMENT	3	YIELDED	AT	SECOND	END
TIME	T=	8.60140	SEC	:	BEAM	ELEMENT	1	YIELDED	AT	SECOND	END

**Πίνακας 7.3.4: Διαδοχή διαρροών μελών τροποποιημένου προσομοιώματος Bouc-Wen**

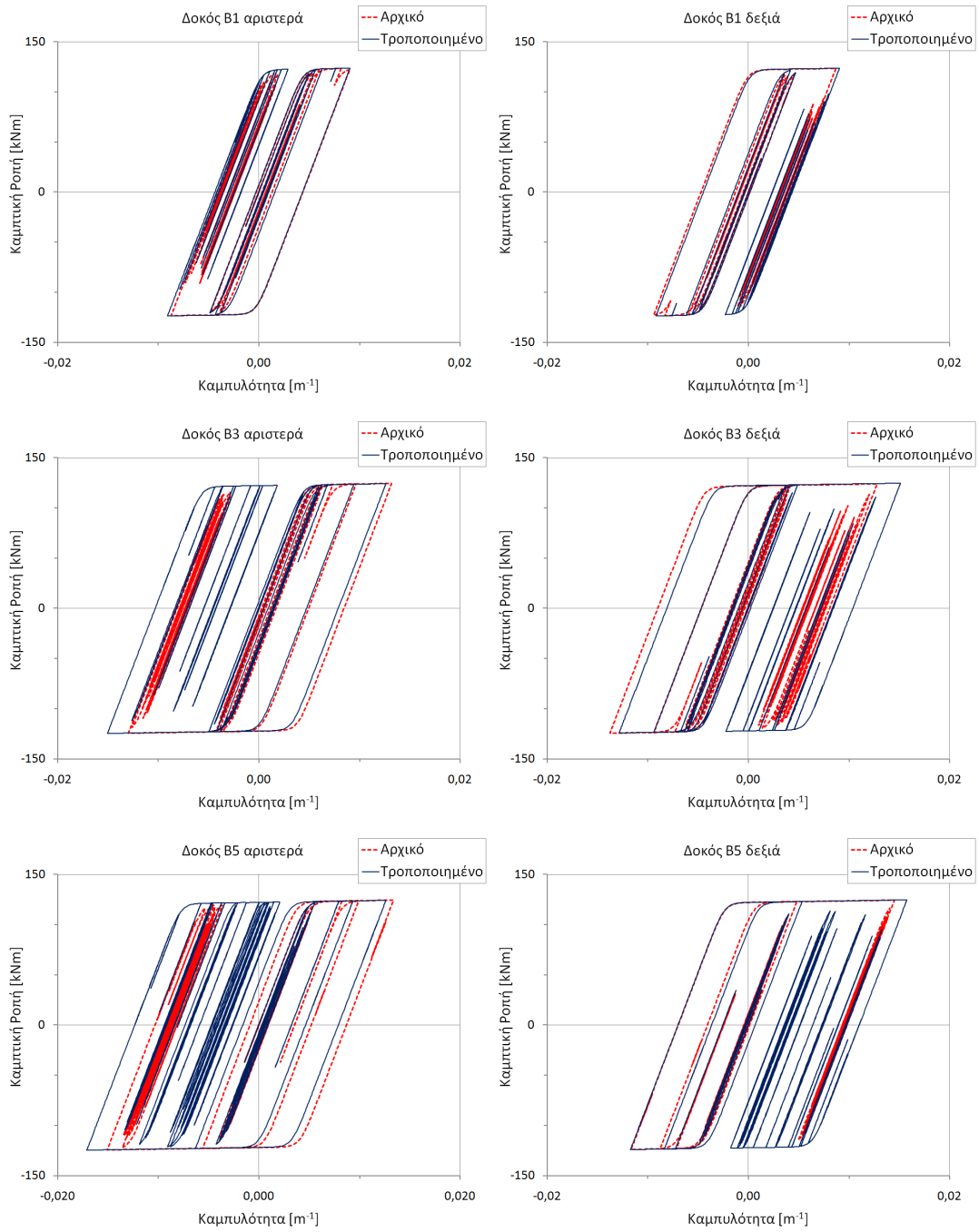




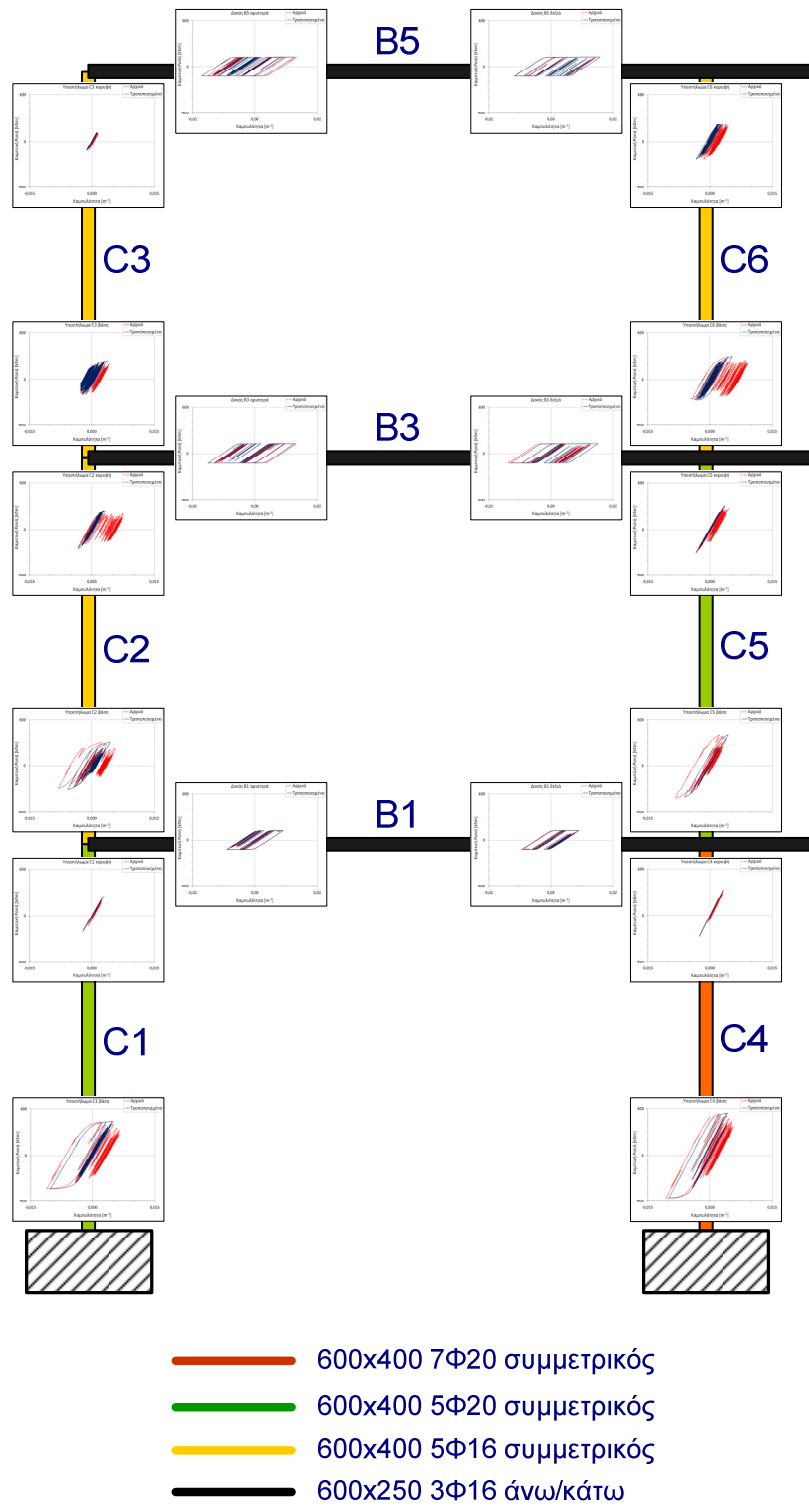
Εικόνα 7.3.12: Απόκριση τριδιάστατου τριώροφου πλαισίου, Σεισμός: Northridge TAR090 [84]



**Εικόνα 7.3.12: Απόκριση τρισεπίστατου τριώροφου πλαισίου, Σεισμός: Northridge TAR090 (συνέχεια)**



**Εικόνα 7.3.12: Απόκριση τρισδιάστατου τριώροφου πλαισίου, Σεισμός: Northridge TAR090 (συνέχεια)**



Εικόνα 7.3.13: Συνολική απόκριση τρισδιάστατου τριώροφου πλαισίου, Σεισμός: Northridge TAR090

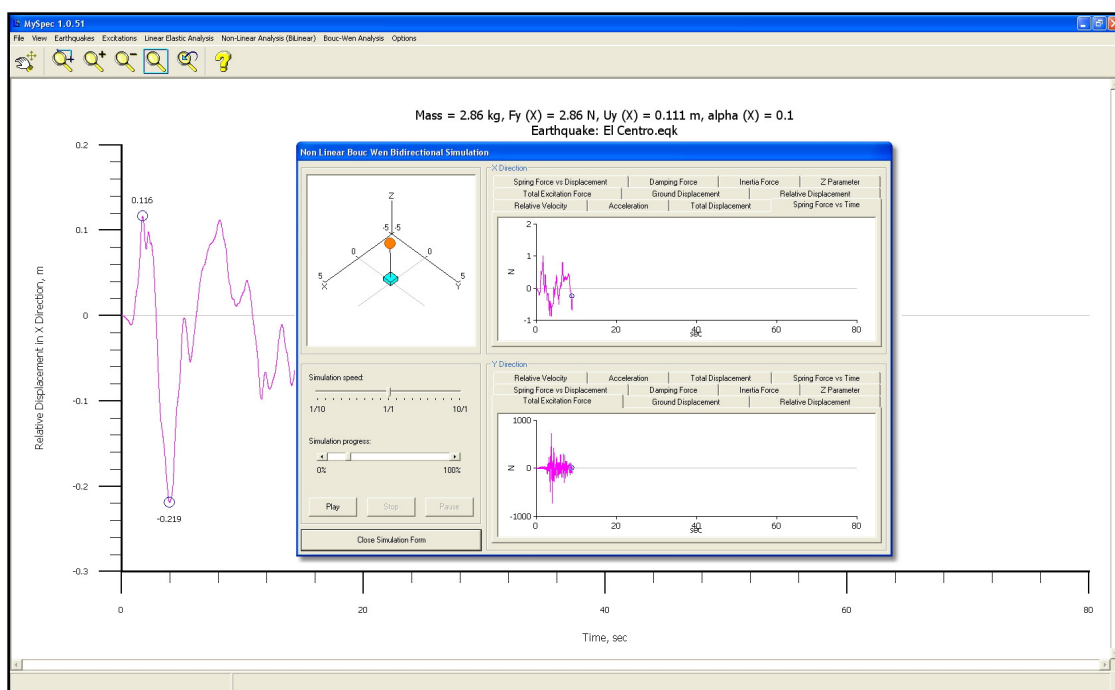
**8**

**Λογισμικό**



## 8.1 mySpec

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αναπτύχθηκε πρόγραμμα Η/Υ με τίτλο mySpec. Το mySpec υπολογίζει την απόκριση μονοβάθμιου ή διβάθμιου ταλαντωτή, ο οποίος υπόκειται σε σεισμική ή άλλη (οριζόμενη από τον χρήστη) διέγερση. Τα προσομοιώματα που χρησιμοποιούνται περιλαμβάνουν το γραμμικώς ελαστικό σε μία και δύο διαστάσεις, το διγραμμικό ανελαστικό και το προσομοίωμα Bouc-Wen. Περισσότερες πληροφορίες για τις δυνατότητες και την χρήση του προγράμματος είναι διαθέσιμες στο εγχειρίδιο χρήσης του. Το mySpec διατίθεται ελεύθερα [170].

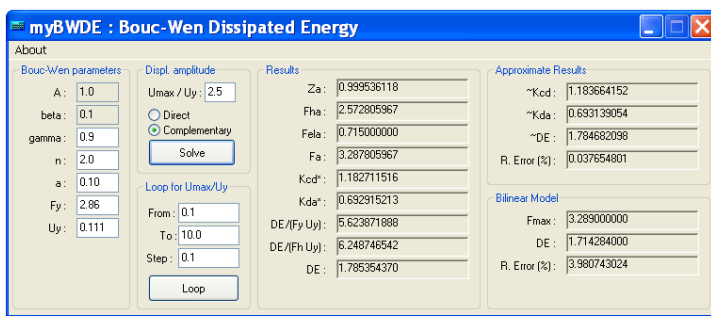


Εικόνα 8.1.1: Πρόγραμμα mySpec

## 8.2 myBWDE

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αναπτύχθηκε πρόγραμμα Η/Υ με τίτλο myBWDE, το οποίο υπολογίζει τις ακριβείς τιμές της αναλίσκόμενης ενέργειας ανά υστερητικό κύκλο με εφαρμογή των μεθόδων που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4. Το πρόγραμμα διατίθεται ελεύθερα [170].

Για λόγους επαλήθευσης και συγκρίσεων, γίνεται υπολογισμός τόσο με την απ' ευθείας μέθοδο όσο και με την μέθοδο των συμπληρωματικών εμβαδών (η οποία και συνίσταται σε κάθε περίπτωση). Το πρόγραμμα διαθέτει γραφικό περιβάλλον και είναι ιδιαίτερα απλό στην χρήση του (Εικόνα 8.2.1). Απαιτείται μόνο η εισαγωγή των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen και ο λόγος της μέγιστης μετατόπισης προς την μετατόπιση διαρροής.



Εικόνα 8.2.1: Πρόγραμμα myBWDE

Τα ακριβή αποτελέσματα συνοψίζονται στο πλαίσιο Results, ως εξής:

- $z_a$  η μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου  $z$ , η οποία αντιστοιχεί στο σημείο  $A$  και υπολογίζεται με επίλυση της εξίσωσης (4.3.6).
- $F_{ha}$  η δύναμη του υστερητικού ελατηρίου στο σημείο  $A$ , η οποία προκύπτει εύκολα με χρήση της σχέσης (4.2.4).
- $F_{ela}$  η δύναμη του γραμμικώς ελαστικού ελατηρίου στο σημείο  $A$ , η οποία προκύπτει εύκολα με χρήση της σχέσης (4.2.3).
- $F_a$  η συνολική δύναμη στο σημείο  $A$ , η οποία προκύπτει ως άθροισμα των  $F_{ha}$  και  $F_{ela}$ .
- $k_{cd}$  ή  $k_{cd}^*$ , η τιμή της παραμέτρου που, ανάλογα με την μέθοδο, δίνεται από τις εξισώσεις (4.3.13) και (4.3.18) αντίστοιχα.
- $k_{da}$  ή  $k_{da}^*$ , η τιμή της παραμέτρου που, ανάλογα με την μέθοδο, δίνεται από τις εξισώσεις (4.3.14) και (4.3.21) αντίστοιχα.



- $DE/(F_y U_y)$  ο λόγος της αναλισκόμενης ενέργειας προς το γινόμενο της δύναμης διαρροής επί την μετατόπιση διαρροής. Αποτελεί μια κανονικοποιημένη μορφή υπολογισμού της αναλισκόμενης ενέργειας.
- $DE/(F_h U_y)$  ο λόγος της αναλισκόμενης ενέργειας προς το γινόμενο της μέγιστης υστερητικής δύναμης επί την μετατόπιση διαρροής. Αποτελεί μια κανονικοποιημένη μορφή υπολογισμού της αναλισκόμενης ενέργειας. Σημειώνεται ότι  $DE/(F_h U_y) = DE/(F_y U_y)/(1-a)$  ενώ ο ίδιος ο λόγος  $DE/(F_h U_y)$  είναι ανεξάρτητος του  $a$ .
- $DE$  η αναλισκόμενη ενέργεια σε έναν πλήρη υστερητικό βρόχο.

Τα αποτελέσματα με την προσεγγιστική μέθοδο συνοψίζονται στο πλαίσιο Approximate Results, ως εξής:

- $\sim k_{cd}^*$ , η προσεγγιστική τιμή της παραμέτρου που δίνεται από την εξίσωση (4.3.23).
- $\sim k_{da}^*$ , η προσεγγιστική τιμή της παραμέτρου που δίνεται από την εξίσωση (4.3.24).
- $\sim DE$ , η προσεγγιστική τιμή της αναλισκόμενης ενέργειας, με βάση την εξίσωση (4.3.22).
- $R. Error (\%)$ , το σχετικό λάθος στην αναλισκόμενη ενέργεια, επί τοις εκατό.

Τα αποτελέσματα με χρήση του αντίστοιχου διγραμμικού προσομοιώματος συνοψίζονται στο πλαίσιο Bilinear Model, ως εξής:

- $F_{\max} (bil.)$  η μέγιστη τιμή της δύναμης. Αυτή υπολογίζεται ως εξής:

$$F_{\max} = \begin{cases} F_y u_{\max}/u_y & u_{\max}/u_y \leq 1 \\ aF_y u_{\max}/u_y + (1-a)F_y & u_{\max}/u_y > 1 \end{cases} \quad (8.2.1)$$

- $DE (bil.)$  η αναλισκόμενη ενέργεια στην περίπτωση του αντίστοιχου διγραμμικού προσομοιώματος. Αυτή υπολογίζεται εύκολα ως εξής [64]:

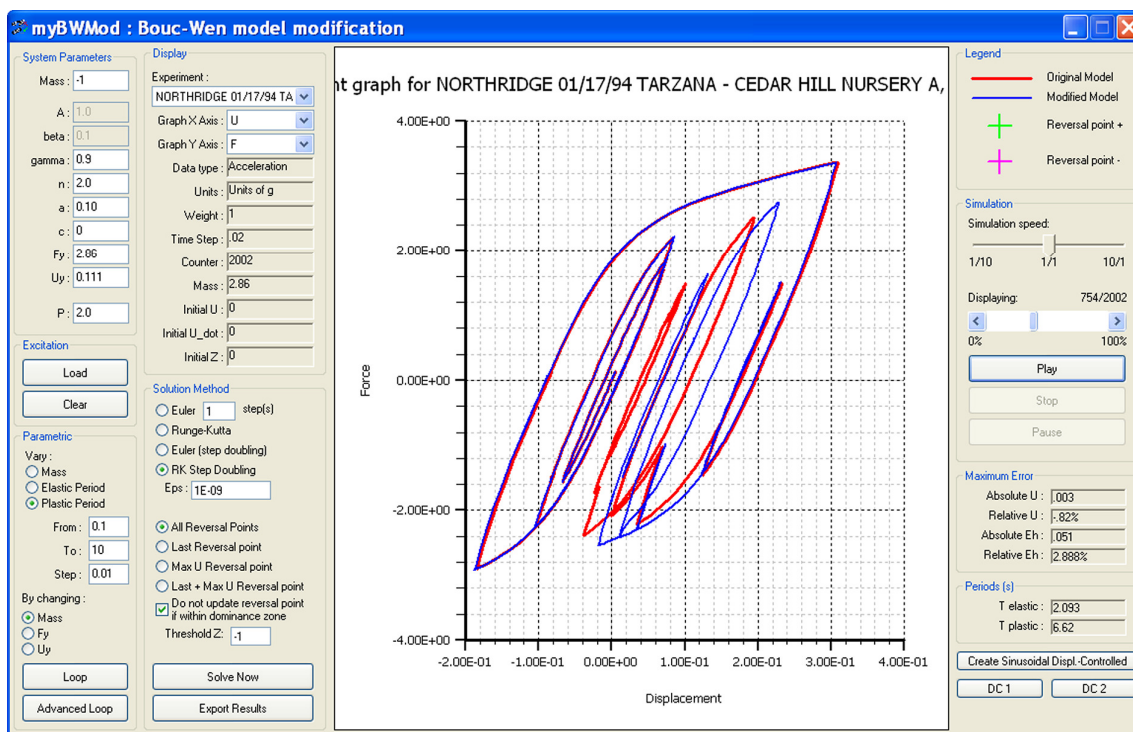
$$DE = \begin{cases} 0 & u_{\max}/u_y \leq 1 \\ 4(F_y u_{\max} - F_{\max} u_y) & u_{\max}/u_y > 1 \end{cases} \quad (8.2.2)$$

- ο  $R. Error (\%)$ , το σχετικό λάθος στην αναλισκόμενη ενέργεια, επί τοις εκατό.

Οι παράμετροι του υστερητικού προσομοιώματος, αν δεν είναι γνωστές, μπορούν να προκύψουν με πειράματα και εφαρμογή διαδικασιών ταυτοποίησης. Μια αποτελεσματική μέθοδος ταυτοποίησης αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής και παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5.

### 8.3 myBWMMod

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αναπτύχθηκε πρόγραμμα Η/Υ με τίτλο myBWMMod, το οποίο υλοποιεί την προτεινόμενη τροποποίηση του προσομοιώματος Bouc-Wen του Κεφαλαίου 4. Το πρόγραμμα διαθέτει γραφικό περιβάλλον (Εικόνα 8.4.1) και διατίθεται ελεύθερα [170].



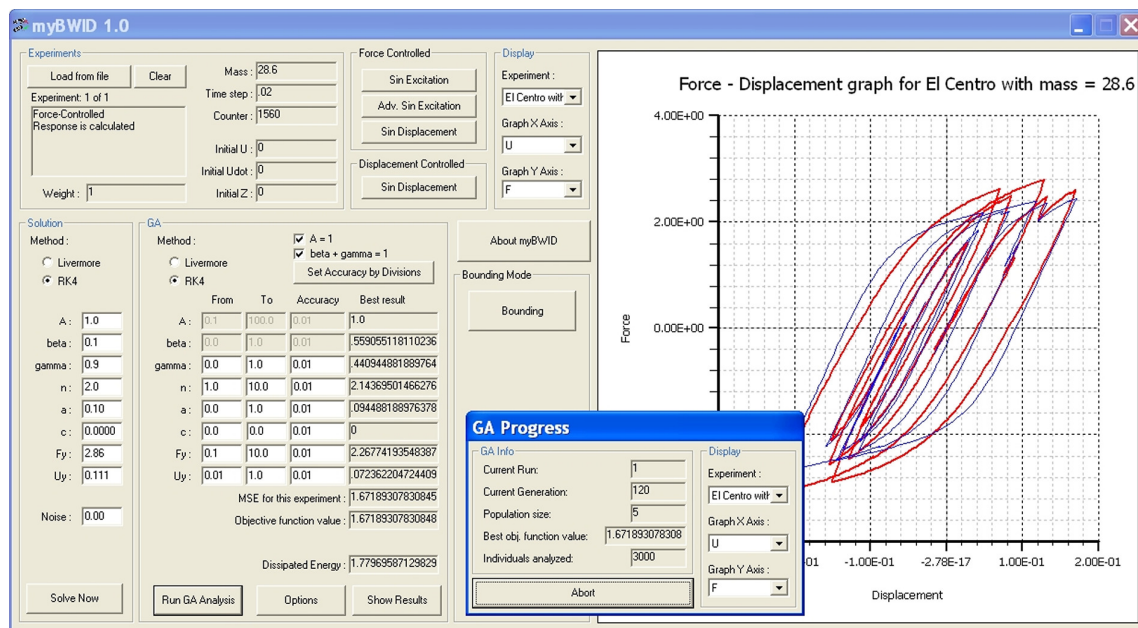
Εικόνα 8.3.1: Πρόγραμμα myBWMMod

Το πρόγραμμα έχει την δυνατότητα υπολογισμού της απόκρισης ενός μονοβάθμιου συστήματος σε σεισμική ή άλλη διέγερση, με βάση τόσο το αρχικό όσο και το

τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc-Wen. Το τροποποιημένο προσομοίωμα μπορεί να χρησιμοποιεί το πλέον πρόσφατο σημείο αναστροφής, το σημείο αναστροφής που αντιστοιχεί στην μέγιστη παρατηρηθείσα παραμόρφωση ή πολλαπλά σημεία αναστροφής, όπως αναλύεται στην §4.5.3. Περισσότερες πληροφορίες για τις δυνατότητες και την χρήση του προγράμματος είναι διαθέσιμες στο εγχειρίδιο χρήσης του.

## 8.4 myBWID

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αναπτύχθηκε πρόγραμμα Η/Υ με τίτλο myBWID, το οποίο υλοποιεί την προτεινόμενη μέθοδο ταυτοποίησης παραμέτρων που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5. Το πρόγραμμα διαθέτει γραφικό περιβάλλον (Εικόνα 8.4.1) και διατίθεται ελεύθερα [170]. Περισσότερες πληροφορίες για τις δυνατότητες και την χρήση του προγράμματος είναι διαθέσιμες στο εγχειρίδιο χρήσης του.

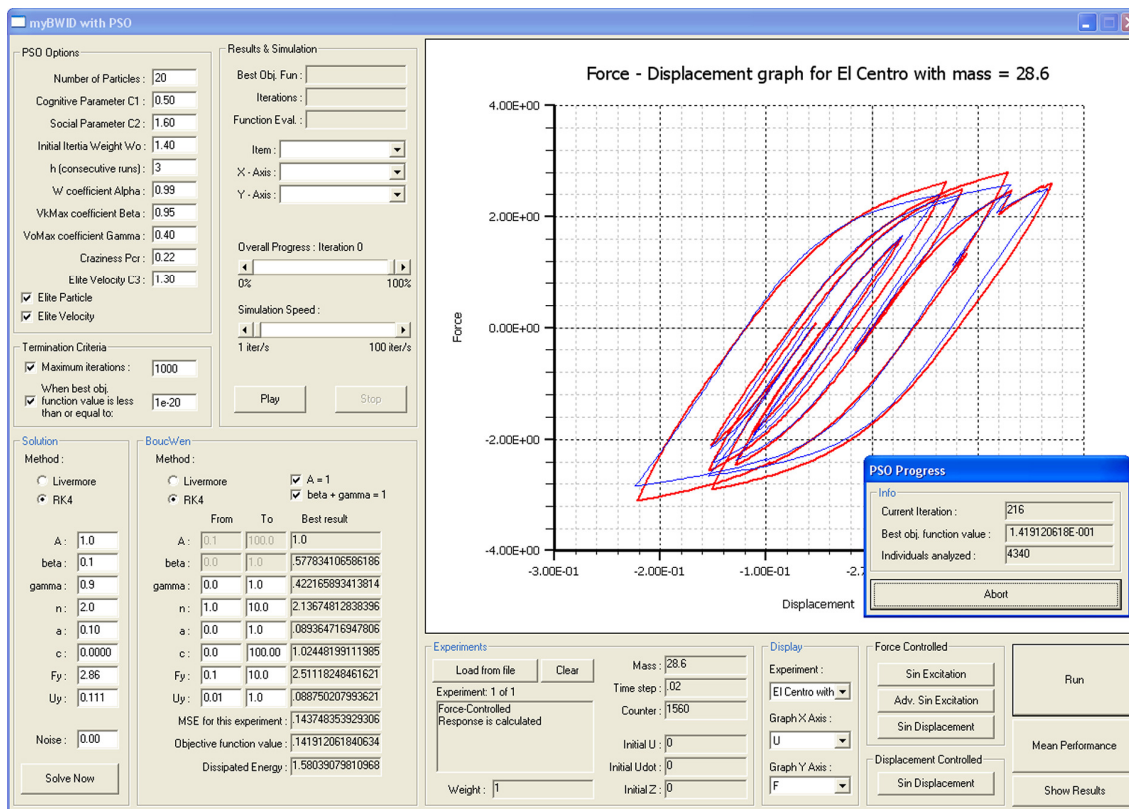


Εικόνα 8.4.1: Πρόγραμμα myBWID

## 8.5 myBWIDPSO

Επιπλέον, για τις ανάγκες συγκριτικής μελέτης του Κεφαλαίου 5 αναπτύχθηκε πρόγραμμα Η/Υ με τίτλο myBWIDPSO το οποίο υλοποιεί τον αλγόριθμο PSO (§5.4.9) για την

ταυτοποίηση των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen. Το πρόγραμμα διαθέτει γραφικό περιβάλλον (Εικόνα 8.5.1) και διατίθεται ελεύθερα [170].



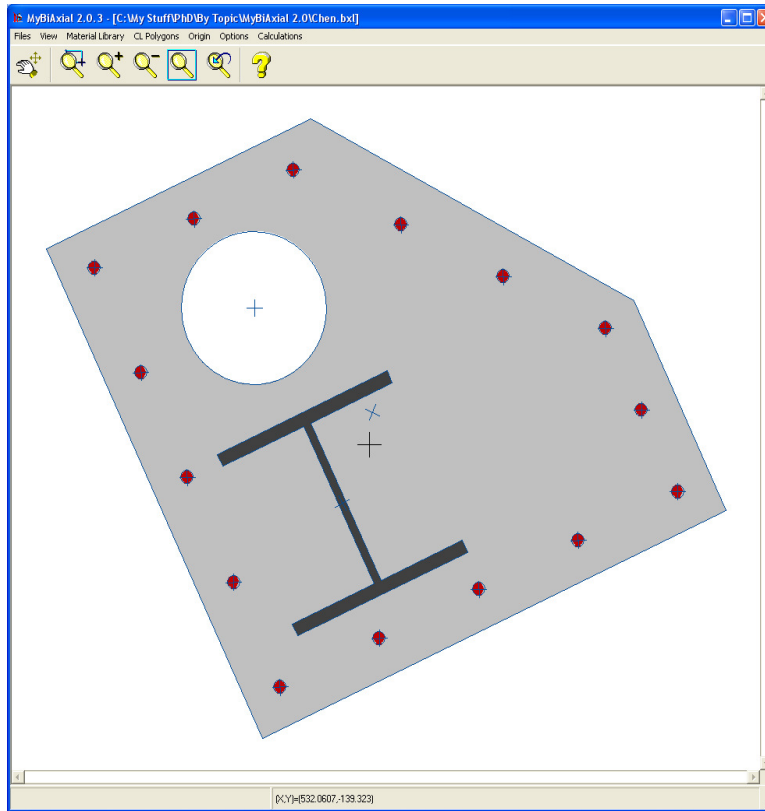
Εικόνα 8.5.1: Πρόγραμμα myBWIDPSO

## 8.6 myBiaxial

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αναπτύχθηκε πρόγραμμα Η/Υ με τίτλο myBiaxial, το οποίο υλοποιεί την προτεινόμενη μέθοδο ανάλυσης τυχαίων διατομών που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 6. Το πρόγραμμα διατίθεται ελεύθερα [170].

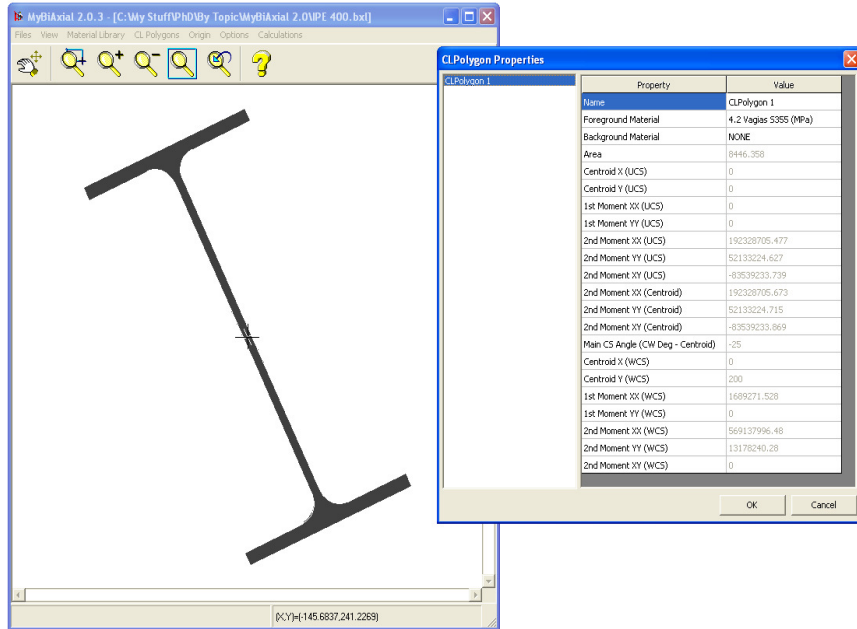
Το πρόγραμμα διαθέτει γραφικό περιβάλλον και είναι ιδιαίτερα απλό στην χρήση του (Εικόνα 8.6.1). Η εισαγωγή της γεωμετρίας της διατομής γίνεται απ' ευθείας μέσω αρχείων DXF. Το πρόγραμμα διαθέτει βιβλιοθήκη υλικών η οποία μπορεί να επεκταθεί. Σε κάθε πολύγωνο αντιστοιχούν δύο υλικά, ήτοι το «προστιθέμενο» υλικό και το «αφαιρούμενο»

υλικό. Τα υλικά επιλέγονται από την φόρμα ιδιοτήτων των καμπυλόγραμμων πολυγώνων (Εικόνα 8.6.2).

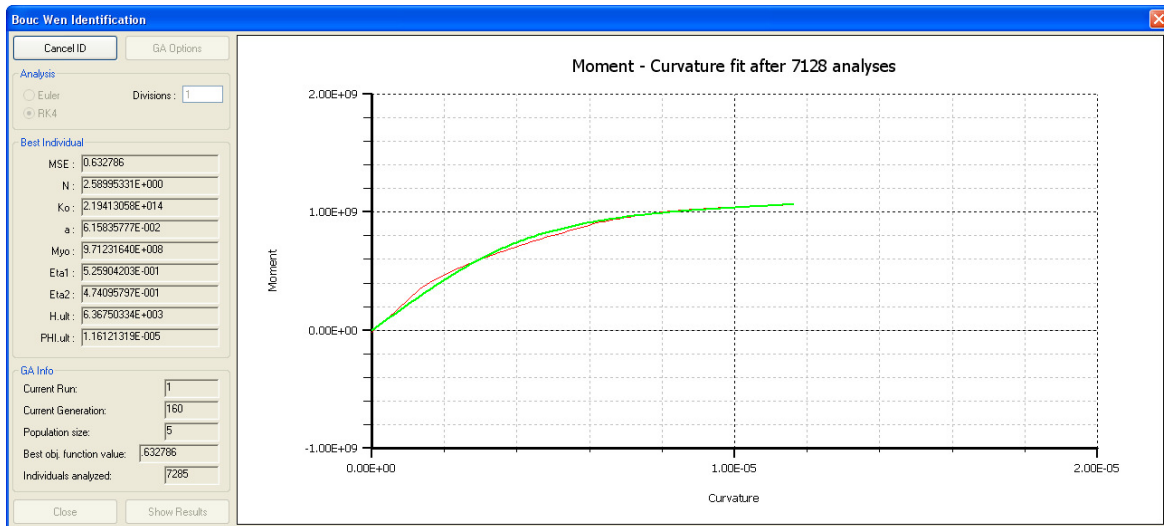


**Εικόνα 8.6.1: Πρόγραμμα myBiaxial**

Με βάση τα παραγόμενα διαγράμματα ροπών – καμπυλοτήτων, το πρόγραμμα myBiaxial έχει την δυνατότητα να ταυτοποιεί τις βασικές παραμέτρους του προσομοιώματος Bouc-Wen με χρήση Γενετικών Αλγορίθμων (Εικόνα 8.6.3)



Εικόνα 8.6.2: Ιδιότητες καμπυλόγραμμων πολυγώνων



Εικόνα 8.6.3: Ταυτοποίηση παραμέτρων προσομοιώματος Bouc-Wen με βάση τα παραγόμενα διάγραμμα ρομών – καμπυλοτήτων και χρήση Γενετικών Αλγορίθμων

Περισσότερες πληροφορίες για τις δυνατότητες και την χρήση του προγράμματος είναι διαθέσιμες στο εγχειρίδιο χρήσης του.

# 9

## Συμπεράσματα





## 9.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα κύρια συμπεράσματα της παρούσας διατριβής καθώς και η συμβολή τους στην αντίστοιχη θεματολογία. Τα συμπεράσματα συνοψίζονται σε παραγράφους οι οποίες ακολουθούν την αρίθμηση των κεφαλαίων.

## 9.2 Υστέρηση

Το πρώτο μέρος της διατριβής αφορά το φαινόμενο της υστέρησης. Έτσι, στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκαν τα βασικά στοιχεία της μαθηματικής θεωρίας της υστέρησης κατά Krasnosel'skiĭ και Rokronskiĭ. Τα στοιχεία αυτά αποτελούν τη θεωρητική βάση των προσομοιωμάτων τύπου Bouc-Wen, τα οποία παρουσιάστηκαν εκτενέστερα στο Κεφάλαιο 3. Ιδιαίτερη αναφορά έγινε στον ορισμό της υστέρησης και την συνθήκη ανεξαρτησίας της απόκρισης από την ταχύτητα επιβολής της φόρτισης, η οποία παρέχει την δυνατότητα αναλυτικής επίλυση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης του προσομοιώματος, η οποία παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 4. Επιπλέον, δόθηκε μια σύντομη ανασκόπηση διαφόρων εμπειρικών και συναφών υστερητικών προσομοιωμάτων τα οποία έχουν παρουσιασθεί κατά καιρούς στην βιβλιογραφία.

## 9.3 Υστερητικά προσομοιώματα τύπου Bouc-Wen

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάστηκε μια ανασκόπηση των κυριότερων προσομοιωμάτων τύπου Bouc-Wen. Επισημάνθηκαν τα βασικά χαρακτηριστικά τους και, όπου κρίθηκε απαραίτητο, προτάθηκαν απλές τροποποιήσεις οι οποίες αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά τις διάφορες αδυναμίες τους.

Ένα παράδειγμα τέτοιας τροποποίησης αποτελεί ο εμπειρικός κανόνας μείωσης της δυσκαμψίας με βάση το σημείο περιστροφής, όπως διατυπώθηκε από τους Park et al. [31] και υλοποιήθηκε στο υστερητικό προσομοίωμα Sivaselvan-Reinhorn (§3.6). Αν και η εν λόγω μέθοδος είναι απλή και εύχρηστη, παρουσιάζει το μεγάλο μειονέκτημα ότι δεν έχει μνήμη και έτσι αποτυγχάνει να αποδώσει την συσσωρευτική φύση του φαινομένου. Έτσι, το προσομοίωμα αυτό παρέχει σε ορισμένες περιπτώσεις λανθασμένα αποτελέσματα, αφού

μπορεί να παρουσιάσει αύξηση της δυσκαμψίας μέχρι σημείου πλήρους επαναφοράς στην αρχική τιμή. Έτσι, προκύπτει εύλογα το συμπέρασμα ότι *ο εμπειρικός κανόνας του σημείου περιστροφής προέκυψε λόγω της τυποποιημένης μορφής που έχουν τα πειράματα (Εικόνα 3.6.3α) και σε αυτή την μορφή δεν μπορεί να έχει γενική ισχύ.* Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος προτάθηκε η εισαγωγή μιας νέας παραμέτρου, η οποία ονομάζεται *βαθμός αποκατάστασης δυσκαμψίας*. Όπως αναλύθηκε στην §3.6.3, η προτεινόμενη τροποποίηση της μεθόδου είναι απλή και αποτελεσματική.

Άλλο παράδειγμα αποτελεί η ανάδειξη της ακαταλληλότητας των κανόνων μείωσης της αντοχής που προτείνονται για το υστερητικό προσομοίωμα Sivaselvan-Reinhorn, όπως αναλύεται στην §3.6.4.

#### **9.4 Υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen**

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάστηκε η βασική μορφή του προσομοιώματος Bouc-Wen. Αναλύθηκε η επίδραση των παραμέτρων του προσομοιώματος στην απόκριση και την μορφή των υστερητικών βρόχων. Επίσης, παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν οι απαραίτητοι περιορισμοί οι οποίοι εξασφαλίζουν την μαθηματική συνέπεια και αναδεικνύουν την φυσική υπόσταση των παραμέτρων του προσομοιώματος.

Το θέμα των περιορισμών των παραμέτρων είναι κεφαλαιώδους σημασίας. Αν και το προσομοίωμα Bouc-Wen είναι γνωστό εδώ και 30 έτη και έχει ενσωματωθεί σε δημοφιλή πακέτα λογισμικού, μόλις πολύ πρόσφατα άρχισε να ξεκαθαρίζει το τοπίο γύρω από την ερμηνεία και την χρήση των παραμέτρων του.

Κατ' αρχήν, τίθεται θέμα *μαθηματικής συνέπειας* του προσομοιώματος. Μόλις το 2004 οι Ma et al. απέδειξαν με μαθηματικούς όρους ότι η παράμετρος  $A$  είναι περιττή και θα πρέπει να τεθεί ίση με την μονάδα [62]. *Εάν δεν τεθεί αυτός ο περιορισμός, υπάρχει μια απειρία διανυσμάτων των παραμέτρων για τις οποίες το προσομοίωμα παρουσιάζει την ίδια απόκριση όταν υποβάλλεται σε μια δεδομένη φόρτιση.* Το γεγονός αυτό ακυρώνει σε μαθηματικό επίπεδο οποιαδήποτε απόπειρα ταυτοποίησης διότι, λόγω της εσωτερικής απροσδιοριστίας, το σύστημα μεταπηδά χωρίς αντιστάσεις σε διαφορετικές λύσεις. Αυτό γίνεται αμέσως

αντιληπτό στην πράξη, διότι για κάθε πείραμα το οποίο χρησιμοποιείται προκύπτουν διαφορετικές λύσεις, εξίσου καλές αλλά εντελώς άσχετες μεταξύ τους. Το κρίσιμο σημείο είναι ότι κάποιες από τις λύσεις ενδεχομένως να παύσουν να είναι αποδεκτές όταν αλλάξουν τα χαρακτηριστικά του πειράματος, όπως δείχθηκε από τους Charalampakis και Koumouisis [129] και αναλύεται στην §5.5.12. Με άλλα λόγια, *το προσομοίωμα χάνει την δυνατότητα πρόβλεψης της απόκρισης του φυσικού συστήματος το οποίο αναπαριστά.*

Αφ' ετέρου, τίθεται θέμα *φυσικής συνέπειας* του προσομοιώματος. Το πρόβλημα εντοπίζεται στις παραμέτρους  $\beta$  και  $\gamma$ , οι οποίες δεν έχουν φυσική υπόσταση. Οι τιμές των παραμέτρων αυτών και ιδιαίτερα η μεταξύ τους ανισοτική σχέση, επηρεάζει κατά συνολικό και μη ελεγχόμενο τρόπο την μορφή των υστερητικών βρόχων. Έτσι, το προσομοίωμα έχει την δυνατότητα να παρουσιάζει παραμορφωσιακή κράτυνση, όπως δείχθηκε από τον Wen [1]. Ταυτόχρονα όμως χάνεται η φυσική υπόσταση των υπόλοιπων παραμέτρων, όπως αναλύεται στην §4.2.2. *Για παράδειγμα, η «δύναμη διαρροής»  $F_y$  δεν ισούται κατ' ανάγκη με την πραγματική δύναμη διαρροής που παρουσιάζει το προσομοίωμα.* Είναι σαφές ότι αυτό προκαλεί σημαντικές δυσχέρειες κατά την ταυτοποίηση των παραμέτρων αλλά και ασάφεια κατά την χρήση τους. Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής γενικά υιοθετείται η χρήση του περιορισμού  $\beta + \gamma = 1$ , η οποία προτάθηκε από τους Constantinou και Adhane [110]. Με βάση τον περιορισμό αυτό το προσομοίωμα παρουσιάζει καλές μηχανικές ιδιότητες, αν και στερείται της δυνατότητας προσομοίωσης παραμορφωσιακής κράτυνσης. Αυτή μπορεί να προσομοιωθεί με πιο αποτελεσματικές μεθόδους, όπως με την χρήση ενός εξειδικευμένου ελατηρίου συνδεδεμένου παράλληλα με τα ελατήρια του προσομοιώματος Bouc-Wen, όπως προτάθηκε από τους Sivaselvan και Reinhorn [46].

Στην συνέχεια, το προσομοίωμα Bouc-Wen επανεξετάστηκε από μαθηματικής άποψης. Προέκυψαν νέες αναλυτικές σχέσεις τόσο για την υστερητική απόκριση όσο και για την αναλυσκόμενη ενέργεια υπό συμμετρική ανακυκλιζόμενη φόρτιση.

Συγκεκριμένα, *η βασική μη γραμμική διαφορική εξίσωση (4.2.2) του προσομοιώματος Bouc-Wen επιλύθηκε αναλυτικά.* Προέκυψε η θεμελιώδης σχέση (4.3.2), η οποία συνδέει την

μετατόπιση  $u$  με την απόκριση του υστερητικού ελατηρίου  $z$  με όρους της υπεργεωμετρικής συνάρτησης του Gauss:

$$\frac{u - u_0}{u_y} = z {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; q|z|^n\right)\bigg|_{z_0}^z$$

Ανάλογα με την τιμή του συντελεστή  $q = \beta + \text{sgn}(\dot{u} z)\gamma$ , η παραπάνω σχέση εκφράζει τους μονοτονικούς κλάδους φόρτισης – αποφόρτισης του υστερητικού ελατηρίου του προσομοιώματος Bouc-Wen. Η σχέση έχει την ιδιαιτερότητα ότι είναι πεπλεγμένη ως προς  $z$  ενώ μπορεί να επιλυθεί εύκολα ως προς  $u$ . Με άλλα λόγια, η είσοδος  $u$  μπορεί να προκύψει εύκολα ως συνάρτηση της εξόδου  $z$  για κάθε τιμή της εκθετικής παραμέτρου  $n$ . Η αντίστροφη διαδικασία απαιτεί την επίλυση της σχέσης (4.3.2) ως προς  $z$ , κάτι το οποίο δεν φαίνεται ότι είναι δυνατό για τυχαία τιμή του  $n$ . Παρ' όλα αυτά, παρουσιάστηκαν οι σχέσεις (4.3.3) και (4.3.4) οι οποίες δίνουν το  $z$  ως συνάρτηση του  $u$  για  $n=1$  και  $n=2$ , αντίστοιχα.

Στην πράξη, η έλλειψη μιας γενικής σχέσης η οποία να εκφράζει την υστερητική παράμετρο  $z$  ως συνάρτηση της μετατόπισης  $u$  δεν είναι σημαντική. Ο λόγος είναι ότι, λόγω της μονοτονικότητας των υστερητικών κλάδων, η αριθμητική επίλυση της σχέσης (4.3.2) ως προς  $z$  είναι εξαιρετικά αποδοτική. Η μοναδική ρίζα της εξίσωσης μπορεί να προσδιοριστεί με χρήση του θεωρήματος Bolzano – Weierstrass [66] και τεχνικές διχοτόμησης διαστημάτων. Προτάθηκε η μέθοδος Van Wijngaarden – Dekker – Brent [65], η οποία συνδυάζει διχοτόμηση και αντίστροφη τετραγωνική παρεμβολή. Η μέθοδος αυτή εγγυάται την εύρεση της ρίζας, εφόσον αυτή έχει φραγεί σε κάποιο διάστημα, και απαιτεί πολύ λίγα βήματα (τυπικά 7 έως 10) για να υπολογίσει την άγνωστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου  $z$  με διπλή ακρίβεια. *Με αυτό τον τρόπο είναι δυνατός ο απ' ευθείας υπολογισμός της απόκρισης για πεπερασμένα, αλλά όχι απαραίτητα μικρά βήματα μετατόπισης.*

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι, σε μερικές περιπτώσεις, είναι επιθυμητή η αναλυτική έκφραση των υστερητικών κλάδων ακριβώς με την μορφή της σχέσης (4.3.2).

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc-Wen. Ο αναλυτικός προσδιορισμός του κλάδου αποφόρτισης από κάποιο σημείο αναστροφής, δηλαδή η σχέση (4.5.2), βασίζεται απ' ευθείας στην σχέση (4.3.2) και ισχύει για κάθε τιμή της εκθετικής παραμέτρου  $n$ .

Στην συνέχεια, εξετάστηκε η περίπτωση σταθερής απόκρισης υπό συμμετρική ανακυκλιζόμενη φόρτιση. Η μέγιστη παρατηρούμενη τιμή της υστερητικής παραμέτρου υπολογίστηκε με βάση την εξίσωση (4.3.6). Παρουσιάστηκαν νέες αναλυτικές εκφράσεις της αναλισκόμενης ενέργειας κατά την διάρκεια ενός πλήρους κύκλου, οι οποίες προέκυψαν με απ' ευθείας ολοκλήρωση του έργου της υστερητικής δύναμης σύμφωνα με την σχέση (4.3.9). Αποδεικνύεται όμως ότι οι σχέσεις είναι ευσταθείς μόνο στην περίπτωση μερικής διαρροής του υστερητικού ελατηρίου. Ο λόγος είναι ότι, σε περίπτωση πλήρους διαρροής, η μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου είναι πολύ κοντά στην μονάδα και δεν μπορεί να υπολογιστεί με επαρκή ακρίβεια. Επιπλέον, η υπεργεωμετρική συνάρτηση  ${}_2F_1(a, b, c; w)$  δεν ορίζεται για  $w = 1$ .

Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε αποτελεσματικά με χρήση μιας εναλλακτικής μεθόδου που βασίζεται στον υπολογισμό *συμπληρωματικών* εμβαδών χωρίων. Οι νέες εκφράσεις, οι οποίες προκύπτουν από την σχέση (4.3.15), είναι αριθμητικά ευσταθείς στην περίπτωση τόσο μερικής όσο και πλήρους διαρροής του υστερητικού ελατηρίου. Στην τελευταία περίπτωση, οι βοηθητικές παράμετροι  $k_{CD}^*$  και  $k_{DA}^*$  μπορούν να υπολογιστούν με ικανοποιητική ακρίβεια από τις προσεγγιστικές σχέσεις (4.3.23) και (4.3.24), αντίστοιχα. *Με βάση τα παραπάνω, η αναλισκόμενη ενέργεια κατά τον πλήρη υστερητικό βρόχο μπορεί να υπολογιστεί με βάση μόνο την μέγιστη μετατόπιση  $u_{\max}$  και το διάνυσμα των παραμέτρων  $\mathbf{p} = \{\gamma \ n \ a \ F_y \ u_y\}^T$  του προσομοιώματος Bouc-Wen.*

Προς εφαρμογή των παραπάνω μεθόδων, πραγματοποιήθηκε μια παραμετρική μελέτη η οποία αφορά την αναλισκόμενη ενέργεια κατά την διάρκεια ενός πλήρους υστερητικού βρόχου ως συνάρτηση της μέγιστης μετατόπισης. Παρατηρήθηκε ότι καθώς η μέγιστη μετατόπιση αυξάνεται, όλες οι καμπύλες γίνονται παράλληλες ευθείες γραμμές. Επιπλέον,

καθώς αυξάνεται η τιμή της εκθετικής παραμέτρου  $n$ , η μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο γίνεται απότομα. Έτσι, η αναλίσκόμενη ενέργεια μειώνεται για τιμές της μέγιστης παραμόρφωσης μικρότερες της «παραμόρφωσης διαρροής», δηλαδή για  $u_{\max}/u_y < 1$  (Εικόνα 4.3.4).

Επιπλέον, πραγματοποιήθηκε μια παραμετρική μελέτη η οποία παρουσιάζει τις διαφορές τριών μεθόδων υπολογισμού της αναλίσκόμενης ενέργειας κατά την διάρκεια ενός πλήρους υστερητικού βρόχου. Οι τρεις μέθοδοι που εξετάστηκαν ήταν:

- η ακριβής μέθοδος υπολογισμού της αναλίσκόμενης ενέργειας του προσομοιώματος Bouc-Wen, όπως παρουσιάστηκε στην §4.3.4,
- η προσεγγιστική μέθοδος της §4.3.4, δηλαδή οι σχέσεις (4.3.23) και (4.3.24),
- οι σχέσεις που δίνουν την αναλίσκόμενη ενέργεια του αντίστοιχου διγραμμικού προσομοιώματος.

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι, *εφόσον η μέγιστη παραμόρφωση είναι μεγαλύτερη από το τετραπλάσιο της «παραμόρφωσης διαρροής», η προσεγγιστική μέθοδος παρουσιάζει πρακτικά μηδενικό λάθος σε σχέση με την ακριβή μέθοδο για κάθε τιμή της εκθετικής παραμέτρου  $n$ . Σε κάθε περίπτωση, η προσεγγιστική μέθοδος είναι πολύ ακριβέστερη από τις σχέσεις που αφορούν το αντίστοιχο διγραμμικό προσομοίωμα* (Εικόνα 4.3.5).

Σε θεωρητικό επίπεδο, με βάση τα παραπάνω προκύπτει ένα σημαντικό συμπέρασμα: *η αναλίσκόμενη ενέργεια του προσομοιώματος Bouc-Wen είναι μη μηδενική ανεξάρτητα από το μέγεθος του υστερητικού βρόχου. Με άλλα λόγια, το προσομοίωμα προβλέπει την ύπαρξη ανελαστικών παραμορφώσεων ανεξάρτητα από την ένταση της φόρτισης*, όπως αποδείχθηκε στην §4.3.5.3. Αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με την «ενδοχρονική» θεωρία του Valanis [70]. Στα ενδοχρονικά προσομοιώματα, στα οποία ανήκει το προσομοίωμα Bouc-Wen [16], [68], η επιφάνεια διαρροής της κλασικής θεωρίας της πλαστικότητας έχει αντικατασταθεί από μια *εγγενή χρονική παράμετρο* (intrinsic time) βάσει της οποίας περιγράφεται η ανελαστική

συμπεριφορά των υλικών. Η απόσβεση του προσομοιώματος Bouc-Wen εξαρτάται κυρίως από τις παραμέτρους  $n$  και  $\gamma$  [179]. Σημειώνεται πάντως ότι οι δυνατότητες απόσβεσης για μικρής έντασης φορτίσεις είναι περιορισμένες, διότι ο υστερητικός βρόχος είναι εκφυλισμένος και πρακτικά ταυτίζεται με την αντίστοιχη ελαστική απόκριση. Σημαντικότερο ποσοστό απόσβεσης μπορεί να επιτευχθεί, για παράδειγμα, με χρήση γραμμικών υστερητικών προσομοιωμάτων με μιγαδική δυσκαμψία (complex-valued stiffness) [178].

Τα αποτελέσματα της παραπάνω έρευνας δημοσιεύθηκαν στο διεθνές επιστημονικό περιοδικό Journal of Sound and Vibration [57]. Επίσης, αναπτύχθηκε ένα εξειδικευμένο πρόγραμμα H/Y με την ονομασία myBWDE, το οποίο χρησιμοποιήθηκε για τις εφαρμογές της §4.3.5. Το πρόγραμμα myBWDE παρουσιάστηκε συνοπτικά στην §8.2 και διατίθεται ελεύθερα [170].

Στην συνέχεια, αναλύθηκε η μη φυσική συμπεριφορά του προσομοιώματος Bouc-Wen όταν αυτό υποβάλλεται σε σύντομους κύκλους αποφόρτισης – επαναφόρτισης. Η μη φυσική συμπεριφορά συνίσταται στην αύξηση της μετατόπισης, την μείωση της δύναμης επαναφοράς και το μη κλείσιμο των υστερητικών βρόχων, κάτι το οποίο οδηγεί σε παραβίαση των αρχών πλαστικότητας του Drucker [71] και του Il'iushin [72]. Σε ποιοτικό επίπεδο, αυτά τα μειονεκτήματα του προσομοιώματος είναι γνωστά εδώ και δεκαετίες και έχουν αναφερθεί επανειλημμένα στην βιβλιογραφία. Σε ποιοτικό επίπεδο, *παρουσιάστηκαν νέες (ορθές) αναλυτικές σχέσεις οι οποίες επιτρέπουν τον υπολογισμό του εύρους των παραβιάσεων και της μη φυσικής συμπεριφοράς.*

Προς αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών, προτάθηκε μια τροποποίηση του προσομοιώματος Bouc-Wen. Το τροποποιημένο προσομοίωμα υλοποιεί την παρατήρηση ότι η επαναφόρτιση μετά από μερική αποφόρτιση θα πρέπει να ακολουθεί τον κλάδο αποφόρτισης μέχρι το σημείο αναστροφής. Βασίζεται σε έναν κατάλληλο συντελεστή αύξησης της δυσκαμψίας, ο οποίος εισάγεται απ' ευθείας στην βασική διαφορική εξίσωση. Αυτό έχει ως συνέπεια την διάκριση μεταξύ πρώτης φόρτισης και επαναφόρτισης, χαρακτηριστικό το οποίο απουσιάζει από το αρχικό προσομοίωμα. Επιπλέον, ορίζεται η

έννοια του «ενεργού» σημείου αναστροφής (§4.5.3), η οποία είναι καθοριστική για την αποτελεσματική εφαρμογή της προτεινόμενης τροποποίησης.

Αποδείχθηκε ότι η προτεινόμενη τροποποίηση διορθώνει την μη φυσική συμπεριφορά του προσομοιώματος στην περίπτωση σύντομων κύκλων φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης χωρίς να επηρεάζει την απόκριση στην περίπτωση πλήρων υστερητικών βρόχων (στην οποία η συμπεριφορά του αρχικού προσομοιώματος ήταν συνεπής). Έτσι, ανασκευάζεται η από καιρό παγιωμένη άποψη ότι «όταν χρησιμοποιούνται ενδοχρονικά προσομοιώματα, τοπικές παραβιάσεις της αρχής ευστάθειας του Drucker δεν μπορούν να αποφευχθούν» (“when endochronic models are adopted, local violations of the Drucker's stability postulate cannot be avoided”, προσωπική επικοινωνία μεταξύ F. Casciati και W.D. Iwan [80]). Στην συνέχεια, αποδείχθηκε ότι η απόκριση του αρχικού και του τροποποιημένου προσομοιώματος μπορεί να παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στην περίπτωση σεισμικής διέγερσης. Συγκεκριμένα, σε παραμετρική μελέτη μονοβάθμιου συστήματος και για μια επιλογή 20 σεισμικών διεγέρσεων (Πίνακας 4.5.1), προέκυψε ότι το σφάλμα στην μέγιστη μετατόπιση και στην αναλυσκόμενη ενέργεια μπορεί να φτάσει το 38% και το 24%, αντίστοιχα.

Η σημασία της διόρθωσης που εισάγει το τροποποιημένο προσομοίωμα αναδεικνύεται επίσης στην §7.3.2, όπου ένας τρισδιάστατος φορέας υποβάλλεται σε σεισμική φόρτιση. Γίνεται φανερό ότι *αφ’ ενός η απόκριση του αρχικού προσομοιώματος δεν συνάδει με την αναμενόμενη φυσική συμπεριφορά κατά τρόπο σαφή και σημαντικό, και αφ’ ετέρου το τροποποιημένο προσομοίωμα διορθώνει πλήρως αυτή την μη φυσική συμπεριφορά*. Γίνεται επίσης προφανές ότι η έκταση και η σημασία των προβλημάτων αυτών αγνοούταν κυρίως λόγω της «κανονικής» μορφής των φορτίσεων που χρησιμοποιούνται σε πειράματα. Όπως φαίνεται και στην περίπτωση αρμονικής φόρτισης του τρισδιάστατου φορέα (§7.3.1), *λόγω των πλήρων υστερητικών βρόχων δεν αναδεικνύονταν τα σημαντικά προβλήματα του αρχικού προσομοιώματος*.



Ιδιαίτερη μνεία θα πρέπει να γίνει στο πρόβλημα αύξησης της παραμόρφωσης (drift) που παρουσιάζει το αρχικό προσομοίωμα. Λόγω του μεγάλου σφάλματος το οποίο εισάγεται και συσσωρεύεται κατά την διάρκεια μιας σεισμικής φόρτισης, *δεν έχει νόημα η οποιαδήποτε ανάλυση η οποία εμπεριέχει την έννοια της παραμόρφωσης*, όπως για παράδειγμα ο κανόνας μείωσης της αντοχής του προσομοιώματος Sivaselvan-Reinhorn (§3.6.4).

Ένα άλλο παράδειγμα διόρθωσης μη φυσικής συμπεριφοράς αφορά την επαναφορά (re-centering) συστημάτων σεισμικής μόνωσης. *Η χρήση του αρχικού προσομοιώματος Bouc-Wen υποεκτιμά την παραμένουσα παραμόρφωση λόγω της φθίνουσας ταλάντωσης κατά το τέλος του φαινομένου* [86]. Έτσι, με μια μη αυτόματη διαδικασία, θα πρέπει να αναζητείται κάθε φορά το σημείο το οποίο (κατ' εκτίμηση) αντιστοιχεί στην παραμένουσα παραμόρφωση και να αγνοείται το υπόλοιπο της απόκρισης [86]. *Το τροποποιημένο προσομοίωμα αντιμετωπίζει εγγενώς το πρόβλημα αυτό.*

Σε θεωρητικό επίπεδο σημειώνεται ότι, σε αντίθεση με το αρχικό, *το τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc-Wen παρουσιάζει μη-τοπική μνήμη*. Πράγματι, σε κάθε δυνατή κατάσταση του συστήματος υπάρχει μια απειρία καμπυλών οι οποίες καθορίζουν την μελλοντική εξέλιξη στην περίπτωση της επαναφόρτισης. Οι καμπύλες αυτές κείτονται μεταξύ του κλάδου αποφόρτισης και του κλάδου φόρτισης του αρχικού προσομοιώματος, ενώ η τελική επιλογή της καμπύλης που θα χρησιμοποιηθεί βασίζεται στον τρέχοντα συντελεστή αύξησης της δυσκαμψίας (Εικόνα 4.5.8). Αυτός εξαρτάται από τα παρελθόντα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης εισόδου.

Ο αναγνώστης μπορεί να παρατηρήσει ομοιότητες στην λειτουργία του τροποποιημένου προσομοιώματος Bouc-Wen με άλλα μη-Μαρκοβιανά προσομοιώματα, όπως το προσομοίωμα Preisach (§2.4.1). Ιδιαίτερα η διαδικασία καθορισμού των «ενεργών» σημείων αναστροφής (§4.5.3) παρουσιάζει ποιοτική ομοιότητα με την ιδιότητα διαγραφής ενδιάμεσων τοπικών ακρότατων (wiping-out property) του προσομοιώματος Preisach.

Η έρευνα σχετικά με το τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc-Wen έχει δημοσιευθεί στο διεθνές επιστημονικό περιοδικό Journal of Sound and Vibration [85]. Επιπλέον, προς

εφαρμογή των παραπάνω μεθόδων, αναπτύχθηκε ένα εξειδικευμένο πρόγραμμα Η/Υ με την ονομασία myBWMMod. Το πρόγραμμα παρουσιάστηκε συνοπτικά στην §8.3 και διατίθεται ελεύθερα [170].

## **9.5 Ταυτοποίηση παραμέτρων**

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάστηκε μια νέα στοχαστική μέθοδος ταυτοποίησης των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen. Η μέθοδος αποτελείται από τον Γενετικό Αλγόριθμο SawTooth [123], τον αλγόριθμο τοπικής βελτιστοποίησης Greedy Ascent Hill Climbing (GAHC) [91] καθώς και έναν νέο μηχανισμό συρρίκνωσης του χώρου των λύσεων (Bounding) [130], ο οποίος βασίζεται σε στατιστική ανάλυση τοπικών βέλτιστων.

Η προτεινόμενη μέθοδος δεν χρησιμοποιεί παραγώγους και διαθέτει εγγενή δυνατότητα παράλληλης εκτέλεσης υπολογισμών σε επεξεργαστές με πολλαπλούς πυρήνες ή και σε δίκτυο Η/Υ. Θεωρώντας ότι οι πυρήνες έχουν παρόμοια επεξεργαστική ισχύ και ότι ο απαιτούμενος χρόνος για την μεταφορά των δεδομένων είναι ασήμαντος, ο υπολογιστικός χρόνος είναι πρακτικά αντιστρόφως ανάλογος του πλήθους των πυρήνων που χρησιμοποιούνται. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς είναι σαφές ότι το μέλλον των Η/Υ βρίσκεται στην παράλληλη εκτέλεση υπολογισμών, κάτι το οποίο καθορίζει την εξέλιξη τόσο σε επίπεδο λογισμικού (software) όσο και σε επίπεδο υλικού (hardware).

Η προτεινόμενη μέθοδος αποδεικνύεται ότι συνδυάζει καλή απόδοση και σταθερότητα. Συγκεκριμένα, υπερτερεί σε σχέση με τον Κλασικό Γενετικό Αλγόριθμο και τον Μικρο-Γενετικό Αλγόριθμο (§5.8.7), ενώ η απόδοσή της είναι ευθέως ανταγωνιστική με την πλέον προηγμένη υλοποίηση του αλγόριθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (PSO) (§5.8.8). Επιπλέον, η προτεινόμενη μέθοδος αντιμετωπίζει με επιτυχία την περίπτωση δεδομένων που περιέχουν θόρυβο (§5.8.4), ενώ επιτρέπει και την ταυτοποίηση ενδεχόμενης ιξώδους απόσβεσης με χρήση κατάλληλων πειραμάτων (§5.8.3).

Τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά της προτεινόμενης μεθόδου μπορούν να αποδοθούν στους παρακάτω λόγους:

- Ο SawTooth-GA αναλαμβάνει την εξερεύνηση (exploration) του χώρου των λύσεων με σκοπό την γρήγορη εύρεση υποσχόμενων περιοχών.
- Ο αλγόριθμος τοπικής βελτιστοποίησης GAHC αναλαμβάνει την αξιοποίηση (exploitation) των λύσεων που προκύπτουν από τον SawTooth-GA παρέχοντας τοπικά βέλτιστα.
- Ο SawTooth-GA εξελίσσεται για λίγες μόνο γενεές. Έτσι, αντί να παρατηρείται σταδιακή μείωση στην απόδοση, κάτι το οποίο είναι αναπόφευκτο στους εξελικτικούς αλγόριθμους [91], η προτεινόμενη μέθοδος εκμεταλλεύεται την αρχική μόνο φάση της εξέλιξης η οποία παρουσιάζει «εκρηκτική» απόδοση.
- Η μέθοδος συρρίκνωσης του χώρου των λύσεων (Bounding) εφαρμόζει τον παραπάνω υβριδικό εξελικτικό αλγόριθμο με σκοπό την δειγματοληψία τοπικών βέλτιστων. Θεωρείται ότι κάθε άγνωστη παράμετρος του προσομοιώματος Bouc-Wen έχει μία μόνο σαφώς ορισμένη βέλτιστη τιμή στο αρχικό επιτρεπτό εύρος τιμών.

Σημειώνεται ότι, με βάση την σχέση (5.7.11), *ο χώρος των επιτρεπτών λύσεων δεν επιτρέπεται να μεγεθυνθεί*. Συνεπώς, η μέθοδος θα πρέπει να χρησιμοποιείται με εξαιρετικά ευρεία αρχικά επιτρεπτά όρια, τα οποία είναι πρακτικά βέβαιο ότι περιλαμβάνουν τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων. Ο λόγος είναι ότι αυξάνεται η αξιοπιστία και η ευχρηστία της μεθόδου χωρίς να επηρεάζεται σημαντικά η απόδοσή της, διότι οι μη ρεαλιστικές τιμές απορρίπτονται γρήγορα κατά τα αρχικά στάδια της ταυτοποίησης.

Αν μια συγκεκριμένη παράμετρος έχει μικρή ευαισθησία, τότε τα αποτελέσματα των αναλύσεων σε κάθε βήμα ταυτοποίησης προκύπτουν διασκορπισμένα σχεδόν ομοιόμορφα στο επιτρεπόμενο διάστημα τιμών της. Εφόσον το μέγεθος του στατιστικού δείγματος είναι επαρκές, η σταθμισμένη τυπική απόκλιση θα είναι σημαντική. Σε αυτή την περίπτωση, το διάστημα των επιτρεπτών τιμών της συγκεκριμένης παραμέτρου παραμένει αμετάβλητο στο επόμενο βήμα ταυτοποίησης, με βάση την σχέση (5.7.11). Έτσι, *αντί να εγκλωβίζεται σε τοπικά βέλτιστα, η προτεινόμενη μέθοδος αναστέλλει την συρρίκνωση του χώρου των λύσεων ανά παράμετρο όταν η στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων δεν δικαιολογεί πρόοδο*. Συνεπώς η μέθοδος δεν επηρεάζεται από ενδεχόμενη μεγάλη διαφοροποίηση στην

ευαισθησία των παραμέτρων, κάτι το οποίο είναι σύνηθες στην περίπτωση του προσομοιώματος Bouc-Wen. Με βάση πλήθος πειραμάτων παρατηρήθηκε ότι οι πλέον ευαίσθητες παράμετροι ταυτοποιούνται ταχύτερα, βοηθώντας τις λιγότερο ευαίσθητες στα επόμενα στάδια της ταυτοποίησης. Με αυτόν τον τρόπο αναδεικνύεται ένα μέτρο σχετικής ευαισθησίας των παραμέτρων, η οποία εξαρτάται μεταξύ άλλων και από το πείραμα με το οποίο γίνεται η ταυτοποίηση.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό της προτεινόμενης μεθόδου είναι ότι είναι ασφαλής όταν η βέλτιστη τιμή μιας παραμέτρου κείται κοντά στο ένα άκρο του διαστήματος των επιτρεπτών τιμών. Ο λόγος είναι ότι, γενικά, η σταθμισμένη μέση τιμή θα κείται κοντά στο ίδιο άκρο. Με βάση την σχέση (5.7.10), το νέο εύρος τιμών ορίζεται συμμετρικά και εκατέρωθεν της σταθμισμένης μέσης τιμής και έτσι η βέλτιστη τιμή παραμένει εντός του χώρου των λύσεων.

Γενικά, όπως αποδεικνύεται και από τις παραμετρικές μελέτες (§5.8.6), η προτεινόμενη μέθοδος δεν είναι ευαίσθητη στην επιλογή των συντελεστών της. Πέραν των ρυθμίσεων που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διατριβή, παρέχονται και οδηγίες για την επιλογή κατάλληλων συντελεστών σε περίπτωση άλλων προβλημάτων (§5.8.9).

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι ο *ρυθμός συρρίκνωσης του χώρου των λύσεων μπορεί να προσφέρει πολύ χρήσιμα συμπεράσματα*. Αν και ενίοτε μπορεί να ανακαλυφθούν τυχαία πολύ καλές λύσεις όσον αφορά την αντικειμενική συνάρτηση, εάν ο ρυθμός συρρίκνωσης του χώρου των λύσεων δεν είναι επαρκής τότε αυτό αποτελεί σημαντική ένδειξη ότι η ταυτοποίηση του συστήματος είναι ανεπιτυχής. Αυτό μπορεί να οφείλεται είτε σε μειονεκτήματα του προσομοιώματος, όπως η χρήση περιττών παραμέτρων ή παραμέτρων με πολύ μικρή ευαισθησία ή με πολλαπλές βέλτιστες τιμές, είτε σε χρήση ακατάλληλων πειραμάτων. Αυτή η συμπεριφορά παρατηρήθηκε συστηματικά σε πολλές περιπτώσεις, όπως όταν περιλαμβάνεται η περιττή παράμετρος  $A$  ως άγνωστος προς ταυτοποίηση ή όταν χρησιμοποιούνται πειράματα με σχεδόν ελαστική απόκριση για την ταυτοποίηση των παραμέτρων που καθορίζουν την μετελαστική συμπεριφορά του προσομοιώματος.

Στα πλαίσια της παραπάνω έρευνας, εξετάστηκε επίσης το σημαντικό θέμα του σχεδιασμού των πειραμάτων. Στην υπάρχουσα βιβλιογραφία υπάρχει πλήθος μεθόδων ταυτοποίησης, κοινό χαρακτηριστικό των οποίων είναι ότι εστιάζουν στην μέθοδο και πρακτικά αγνοούν τα δεδομένα εισόδου. Υπάρχει ομοφωνία στο ότι τα δεδομένα αυτά θα πρέπει να περιλαμβάνουν, σε ποιοτικό επίπεδο, όλα τα χαρακτηριστικά του προσομοιώματος που πρόκειται να ταυτοποιηθούν. Παρ' όλα αυτά, δεν έχει πραγματοποιηθεί κάποια συστηματική έρευνα πάνω στο θέμα. Έτσι, το φυσικό σύστημα υποβάλλεται σε μια αρμονική ή σεισμική διέγερση με κάποια χαρακτηριστικά, και θεωρείται, χωρίς να εξετάζεται, ότι τα παρατηρούμενα δεδομένα περιέχουν όλη την απαραίτητη πληροφορία για τις ανάγκες της ταυτοποίησης. Όπως αποδείχθηκε όμως, η πληροφορία που περιέχεται στα παρατηρούμενα δεδομένα αποτελεί καθοριστικό παράγοντα όχι μόνο για την απόδοση αλλά ακόμη και για την επιτυχία της (οποιασδήποτε) μεθόδου ταυτοποίησης.

Με βάση και παλαιότερες μελέτες των Charalampakis και Koumouisis [129], αποδεικνύεται ότι η ταυτοποίηση μονοβάθμιων συστημάτων με διάφορες ιδιοπεριόδους και διάφορα επίπεδα ιξώδους απόσβεσης είναι γενικά εφικτή. Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα των αναλύσεων (§5.8.2), *η απόδοση της μεθόδου συνδέεται με την μορφή και το μέγεθος των υστερητικών βρόχων και όχι με συγκεκριμένες ιδιότητες του άγνωστου συστήματος ή της διέγερσης*. Αυτό αποτελεί ένα πρώτο σημαντικό συμπέρασμα για τον αποτελεσματικό σχεδιασμό των πειραμάτων.

Ένα δεύτερο σημαντικό συμπέρασμα αφορά την ύπαρξη ή μη άγνωστης ιξώδους απόσβεσης στο σύστημα. Αποδεικνύεται ότι *όταν δεν υπάρχει ιξώδης απόσβεση (ή όταν αυτή θεωρείται γνωστή), ένα μόνο πείραμα απλής αρμονικής φόρτισης αρκεί για την ταυτοποίηση των άγνωστων παραμέτρων*. Αντίθετα, στην περίπτωση που υπάρχει άγνωστη ιξώδης απόσβεση, *η χρήση ενός μόνο πειράματος απλής αρμονικής φόρτισης δεν ενδείκνυται, καθόσον η απόσβεση τείνει να αποδοθεί περισσότερο στον συντελεστή ιξώδους απόσβεσης παρά στην υστερητική απόσβεση του ίδιου του προσομοιώματος*. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος *προτείνεται η χρήση συνδυασμού πειραμάτων απλής*

αρμονικής φόρτισης με διαφορετική ένταση ή/και συχνότητα, η οποία αποδεικνύεται ότι οδηγεί σε επιτυχή διαχωρισμό και αποδοτική ταυτοποίηση τόσο της ιξώδους όσο και της υστερητικής απόσβεσης.

Ένα τρίτο σημαντικό συμπέρασμα αφορά το μέγεθος των υστερητικών βρόχων για την αποδοτικότερη ταυτοποίηση των παραμέτρων. Κατ' αρχήν επιβεβαιώνεται το αυτονόητο, δηλαδή ότι *δεν θα πρέπει να χρησιμοποιούνται πειράματα με σχεδόν ελαστική απόκριση για την ταυτοποίηση παραμέτρων που καθορίζουν την μετελαστική συμπεριφορά*. Αποδεικνύεται επίσης ότι *η ταυτοποίηση των λιγότερο ευαίσθητων παραμέτρων ευνοείται στην περίπτωση που η απόκριση μόλις εισέρχεται στην μετελαστική περιοχή*. Ο λόγος είναι ότι εάν η απόκριση εισέρχεται έντονα στην μετελαστική περιοχή, τότε οι παράμετροι που καθορίζουν τον διγραμμικό σκελετό της απόκρισης (δηλαδή οι  $a$ ,  $F_y$ ,  $u_y$ ) έχουν μεγάλη ευαισθησία. Αντίθετα, η ευαισθησία των παραμέτρων που ελέγχουν την μετάβαση μεταξύ των κλάδων (δηλαδή οι  $n$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) είναι μικρή.

Συνολικά, αν και δεν υπάρχει κάποια μέθοδος ταυτοποίησης η οποία να μπορεί να χαρακτηριστεί ως πανάκεια, η προτεινόμενη μέθοδος αποδεικνύεται ότι παρουσιάζει αυξημένη απόδοση σε σχέση με υπάρχουσες μεθόδους της βιβλιογραφίας.

Τα αποτελέσματα της παραπάνω έρευνας δημοσιεύθηκαν στο διεθνές επιστημονικό περιοδικό Journal of Sound and Vibration [130]. Επίσης, αναπτύχθηκαν δύο εξειδικευμένα προγράμματα Η/Υ με τις ονομασίες myBWID και myBWIDPSO. Τα προγράμματα παρουσιάστηκαν συνοπτικά στις §8.4 και §8.5, αντίστοιχα, και διατίθενται ελεύθερα [170].

## **9.6 Διαξονική κάμψη με προσομοιώματα ινών**

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάστηκε μια νέα μέθοδος ανάλυσης τυχαίων διατομών σε διαξονική κάμψη με αξονική δύναμη, η οποία αντιμετωπίζει αποτελεσματικά τα διάφορα μειονεκτήματα των υφιστάμενων μεθόδων της βιβλιογραφίας. Η μέθοδος βασίζεται σε προσομοιώματα ινών και παρέχει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την απόκριση μιας τυχαίας διατομής σε μονοτονική φόρτιση. *Αυτό δίνει την δυνατότητα ταυτοποίησης βασικών παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen χωρίς την διενέργεια πειραμάτων*.

Η διατομή ορίζεται με την βοήθεια καμπυλόγραμμων πολυγώνων, δηλαδή πολυγώνων των οποίων οι ακμές είναι ευθείες γραμμές ή τόξα κύκλου και μπορεί να έχει πρακτικά οποιαδήποτε μορφή. Οι σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων των υλικών αποτελούνται από οποιοδήποτε αριθμό συνεχόμενων κυβικών πολυωνύμων παρέχοντας τη δυνατότητα ακριβούς προσομοίωσης. Η μέθοδος χρησιμοποιεί αναλυτικές σχέσεις για την ολοκλήρωση του πεδίου των τάσεων, ακόμη και στην περίπτωση καμπύλων περιγραμμάτων.

Η προτεινόμενη μέθοδος αντιμετωπίζει τα εξής προβλήματα: (α) τον υπολογισμό του πλήρους διαγράμματος ροπών – καμπυλοτήτων, (β) τον υπολογισμό της μέγιστης αντοχής της διατομής, ο οποίος περιλαμβάνει την κατασκευή τόσο διαγραμμάτων αλληλεπίδρασης όσο και επιφανειών αστοχίας, και (γ) τον καθορισμό της παραμορφωμένης κατάστασης της διατομής υπό δεδομένα εξωτερικά φορτία.

Λόγω των καμπυλόγραμμων πολυγώνων και της αναλυτικής ολοκλήρωσης του πεδίου των τάσεων, η προτεινόμενη μέθοδος συνδυάζει εξαιρετική ακρίβεια και καλή απόδοση. Έτσι, είναι απαλλαγμένη από σημαντικά προβλήματα που χαρακτηρίζουν την πλειονότητα των αντίστοιχων μεθόδων της βιβλιογραφίας. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι το σφάλμα τόσο λόγω προσομοίωσης καμπύλων τμημάτων με απλά πολύγωνα όσο και λόγω της θεώρησης ότι οι ράβδοι οπλισμού είναι αδιάστατες μπορεί να είναι σημαντικό (§6.8.3). Επιπλέον, η προτεινόμενη μέθοδος επιτρέπει την προσομοίωση πολλαπλών επιπέδων περισφιγξης. Έτσι, τα αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν αξονική καταπόνηση σύμμικτων υποστηλωμάτων βρίσκονται πλέον σε καλή συμφωνία με τα πειράματα (§6.8.4).

Τα αποτελέσματα παραπάνω έρευνας δημοσιεύθηκαν στο διεθνές επιστημονικό περιοδικό *Advances in Engineering Software* [176]. Επίσης, αναπτύχθηκε ένα εξειδικευμένο πρόγραμμα Η/Υ με την ονομασία *myBiaxial* το οποίο και χρησιμοποιήθηκε για τις εφαρμογές της §6.8. Με βάση την εμπειρία από την χρήση του προγράμματος, η προτεινόμενη μέθοδος αποδεικνύεται γενική, γρήγορη και εξαιρετικά ακριβής. Το πρόγραμμα παρουσιάστηκε συνοπτικά στην §8.6 και διατίθεται ελεύθερα [170].

## **9.7 Εφαρμογές**

Στο κεφάλαιο 7 έγινε εφαρμογή των προτεινόμενων μεθόδων με χρήση του λογισμικού δυναμικής ανάλυσης *Plastique*, στο οποίο προστέθηκαν οι κατάλληλες ρουτίνες ώστε να υπάρχει η δυνατότητα ανάλυσης με βάση το τροποποιημένο προσομοίωμα Bouc-Wen (Κεφάλαιο 4).

Με βάση την απόκριση ενός τρισδιάστατου τριώροφου πλαισίου, το οποίο υποβάλλεται τόσο σε απλή αρμονική φόρτιση όσο και σε σεισμική διέγερση, επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα της §9.4. Έτσι, στην περίπτωση της ημιτονοειδούς φόρτισης οι διαφορές μεταξύ αρχικού και τροποποιημένου προσομοιώματος είναι μικρές. Αυτό οφείλεται στην μορφή της διέγερσης, η οποία δεν προκαλεί σύντομους κύκλους φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης αλλά πλήρεις υστερητικούς βρόχους.

Αντίθετα, στην περίπτωση της σεισμικής διέγερσης, η οποία ενδιαφέρει στην πράξη, οι διαφορές μεταξύ αρχικού και τροποποιημένου προσομοιώματος αποδεικνύονται σημαντικές. Το εύρος των διαφορών εξαρτάται κυρίως από την μορφή της απόκρισης και τις παραμέτρους του προσομοιώματος Bouc-Wen. Όταν ο εκθετικός συντελεστής  $n$  είναι σχετικά μικρός, το αρχικό προσομοίωμα Bouc-Wen παρουσιάζει έντονα μη φυσική συμπεριφορά. Στην περίπτωση των υποστηλωμάτων C2, C3 και C6, όπου  $n = 1.481$ , το φαινόμενο είναι έντονο και εκδηλώνεται με σημαντική αύξηση της παραμόρφωσης (π.χ. Εικόνα 7.3.12, κορυφή υποστηλώματος C2, βάση υποστηλώματος C6). Αντίθετα, το τροποποιημένο προσομοίωμα αντιμετωπίζει εγγενώς το πρόβλημα αυτό.

Στην περίπτωση των δοκών, όπου  $n = 10$ , παρατηρείται ότι η απόκριση προσομοιάζει έντονα αυτή του διγραμμικού προσομοιώματος. Η διαφορά μεταξύ αρχικού και τροποποιημένου προσομοιώματος είναι μικρή στην αρχή του φαινομένου αλλά στην συνέχεια γίνεται σημαντική. Αυτό οφείλεται περισσότερο στα υποστυλώματα που συντρέχουν στον ίδιο κόμβο παρά στην δοκό καθεαυτή. Στην περίπτωση μονοβάθμιου συστήματος με μεγάλη τιμή της εκθετικής παραμέτρου, γενικά αναμένουμε μικρή διαφορά μεταξύ αρχικού και τροποποιημένου προσομοιώματος. Σημειώνεται όμως ότι, ούτως ή



άλλως, σε αυτήν την περίπτωση το προσομοίωμα Bouc-Wen δεν προσφέρει πλεονεκτήματα έναντι του απλού διγραμμικού προσομοιώματος.

[ΚΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ]

# 10

## Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα



Κανένας δεν μπορεί να ισχυριστεί ότι κάποιο γνωστικό αντικείμενο έχει εξαντληθεί. Φιλοδοξία της παρούσας διατριβής είναι, πέρα από την σαφή προσφορά νέας γνώσης, η διάνοιξη νέων δρόμων για περαιτέρω έρευνα.

Όσον αφορά το προσομοίωμα Bouc-Wen, η προτεινόμενη τροποποίηση του Κεφαλαίου 4 μπορεί να εφαρμοστεί σε πιο σύνθετα προσομοιώματα, όπως π.χ. το προσομοίωμα Sivaselvan – Reinhorn [46], τα οποία λαμβάνουν υπόψη μείωση της αντοχής και της δυσκαμψίας. Η εφαρμογή της τροποποίησης είναι εφικτή διότι εστιάζεται στο υστερητικό ελατήριο και είναι διατυπωμένη πλήρως στον χώρο  $u - z$ .

Πολλές δυνατότητες ανοίγονται επίσης στον χώρο της ταυτοποίησης των παραμέτρων. Η προτεινόμενη μέθοδος ταυτοποίησης του Κεφαλαίου 5 συνδυάζει καλή απόδοση και μεγάλη σταθερότητα. Εξαιρετικά ενδιαφέρουσα είναι η εφαρμογή της μεθόδου αυτής σε δίκτυα Η/Υ με παράλληλη εκτέλεση υπολογισμών. Κάτι τέτοιο θα οδηγήσει, βεβαίως, σε σημαντική μείωση του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου. Σημαντικότερο όμως είναι ότι θα ανοίξει ο δρόμος για την ταυτοποίηση πολυβάθμιων συστημάτων, κάτι το οποίο αυτή τη στιγμή είναι πρακτικώς δύσκολο λόγω του μεγάλου υπολογιστικού κόστους.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα δυνατότητα αφορά την ταυτοποίηση των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen για την περίπτωση τυχαίων διατομών π.χ. ωπλισμένου σκυροδέματος. Η προτεινόμενη μέθοδος ανάλυσης διατομών του Κεφαλαίου 6 δίνει την δυνατότητα απόκτησης σημαντικών πληροφοριών χωρίς την διεξαγωγή πειραμάτων. Στην συνέχεια, οι άγνωστες τιμές των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen υπολογίζονται με έναν αλγόριθμο βελτιστοποίησης, όπως π.χ. ο Sawtooth-GA. Η ανάλυση μεγάλου πλήθους τυχαίων διατομών κατ' αυτόν τον τρόπο και η ταξινόμησή τους με βάση διάφορα χαρακτηριστικά, όπως η μορφή, το ποσοστό οπλισμού, η ποιότητα του χάλυβα και του σκυροδέματος, η θλιπτική δύναμη κ.λ.π., δίνουν την δυνατότητα εκπαίδευσης ενός Νευρωνικού Δικτύου (Neural Network – NN). Εφόσον τα δεδομένα είναι επαρκή, το νευρωνικό αυτό δίκτυο θα μπορεί να αποτελεί ένα μαύρο κουτί το οποίο να δίνει τις

άγνωστες τιμές των παραμέτρων του προσομοιώματος Bouc-Wen με βάση μακροσκοπικά χαρακτηριστικά της διατομής και χωρίς οποιαδήποτε ανάλυση.

# Παράρτημα





## Παράρτημα Α: Υπολογισμός Υπεργεωμετρικής συνάρτησης

Η υπεργεωμετρική συνάρτηση  ${}_2F_1(a, b, c; w)$  του Gauss είναι η αναλυτική έκφραση της λεγόμενης υπεργεωμετρικής σειράς [40]:

$${}_2F_1(a, b, c; w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{w^n}{n!} \quad (\text{A.1})$$

όπου:

- $a, b, c, w$  μιγαδικά ορίσματα της συνάρτησης,
- $(w)_n = w(w+1)\dots(w+n-1), (w)_0 = 1$  είναι το σύμβολο Pochhammer,
- $n!$  το παραγοντικό του  $n$ .

Η υπεργεωμετρική συνάρτηση  ${}_2F_1(a, b, c; w)$  είναι μια λύση της λεγόμενης υπεργεωμετρικής διαφορικής εξίσωσης, η οποία μπορεί να γραφεί ως εξής [40]:

$$z(1-z) \frac{d^2w}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dw}{dz} - abw = 0 \quad (\text{A.2})$$

Στην παρούσα διατριβή, απαιτείται ο υπολογισμός της υπεργεωμετρικής συνάρτησης για πραγματικές τιμές του  $w \in (-\infty, 1)$ . Αν και ο κύκλος σύγκλισης της σειράς (A.1) είναι ο μοναδιαίος κύκλος  $|w|=1$ , ο ρυθμός σύγκλισης της είναι ικανοποιητικός μόνο για  $|w| \leq 1/2$  [65]. Για τιμές του  $w \in (1/2, 1)$ , ο υπολογισμός γίνεται με γραμμικό μετασχηματισμό. Στις περιπτώσεις που παρουσιάζονται στην παρούσα διατριβή, ισχύει ότι  $c = a + b$  και συνεπώς γίνεται χρήση της παρακάτω σχέσης [40]:

$$\begin{aligned} & {}_2F_1(a, b, a+b; w) = \\ & = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} [2\psi(n+1) - \psi(a+n) - \psi(b+n) - \ln(1-w)] (1-w)^n \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

όπου:

- $\Gamma(\bullet)$  η συνάρτηση Γάμμα.
- $\psi(\bullet)$  η συνάρτηση ψ (δίγαμμα).

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων Γάμμα και Δίγαμμα αναλύεται στο Παράρτημα Β. Γενικά, η σχέση (A.3) παρουσιάζει ικανοποιητικό ρυθμό σύγκλισης ακόμη και στην περίπτωση υπολογισμού του ορίου καθώς  $w \rightarrow 1^-$ . Τέλος, για  $w \in (-\infty, -1/2)$ , γίνεται χρήση του παρακάτω γραμμικού μετασχηματισμού [40]:

$${}_2F_1(a, b, c; w) = (1-w)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{w}{w-1}\right) \quad (\text{A.4})$$

Ο νέος υπολογισμός της υπεργεωμετρικής συνάρτησης εμπίπτει στις περιπτώσεις που καλύπτονται από τις σχέσεις (A.1) και (A.3).

## Παράρτημα Β: Υπολογισμός συναρτήσεων Γάμμα και Δίγαμμα

Η συνάρτηση Γάμμα  $\Gamma(z)$  μπορεί να οριστεί ως [65]:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{B.1})$$

όπου  $z$  μιγαδικό όρισμα. Η παραπάνω σχέση οφείλεται στον Euler. Για ακέραιες τιμές του ορίσματος, η συνάρτηση Γάμμα συνδέεται με το παραγοντικό σύμφωνα με την σχέση:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\text{B.2})$$

όπου  $n!$  το παραγοντικό του  $n$ . Η χρήση της μορφής  $\Gamma(n+1)$  αντί για  $\Gamma(n)$  οφείλεται στον Legendre και γενικά δεν διευκολύνει την ανάλυση. Ο υπολογισμός της συνάρτησης Γάμμα γίνεται κατά κανόνα με τον αλγόριθμο του Lanczos [180]. Ο αλγόριθμος αυτός διορθώνει την προσέγγιση Stirling με βάση τους πόλους της συνάρτησης Γάμμα και απαιτεί χρόνο  $O(-\log \varepsilon)$  για να υπολογίσει το  $z!$  ανεξαρτήτως  $z$  με σχετική ακρίβεια  $\varepsilon$ . Για συγκεκριμένες τιμές των ακεραίων  $\gamma$ ,  $N$  και των πραγματικών  $c_0, c_1, \dots, c_N$ , η συνάρτηση Γάμμα μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση [65]:

$$\Gamma(z+1) = \left(z + \gamma + \frac{1}{2}\right)^{z+\frac{1}{2}} e^{-\left(z+\gamma+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{2\pi} \left[ c_0 + \frac{c_1}{z+1} + \frac{c_2}{z+2} + \dots + \frac{c_N}{z+N} + \varepsilon \right] \quad (z > 0) \quad (\text{B.3})$$

Η συνήθης υλοποίηση του αλγορίθμου χρησιμοποιεί  $\gamma = 5$ ,  $N = 6$  και συγκεκριμένες τιμές των  $c_0, c_1, \dots, c_6$ . Με αυτές, η σχέση (B.3) παρουσιάζει το εντυπωσιακά μικρό σφάλμα  $|\varepsilon| < 2 \times 10^{-10}$  για ολόκληρο το δεξί ημιεπίπεδο  $\text{Re}(z) > 0$ .

Η συνάρτηση Δίγαμμα ορίζεται ως η λογαριθμική παράγωγος της συνάρτησης Γάμμα [40]:

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (\text{B.4})$$

Ο υπολογισμός της συνάρτησης Δίγαμμα γίνεται κατά κανόνα με τον αλγόριθμο του Srouge [181], ο οποίος παρουσιάζει σημαντικές ομοιότητες με αυτόν του Lanczos [180].

## Παράρτημα C: Ενεργή ζώνη σημείου αναστροφής

Αναφερόμενοι στην Εικόνα 4.5.6, θα αποδείξουμε ότι, ξεκινώντας από το σημείο  $P^+(u_p^+, z_p^+)$ , εάν η υστερητική παράμετρος  $z$  μεταβάλλεται παίρνοντας διαδοχικά τις τιμές  $z_p^+ \rightarrow -z_p^+ \rightarrow z_p^+$  τότε η απόκριση οδηγείται στο σημείο  $P^+$  και ο υστερητικός βρόχος κλείνει ακριβώς.

Θεωρούμε ότι το τελικό σημείο είναι το  $\hat{P}^+(\hat{u}_p^+, z_p^+) \neq P^+$ . Η απόκριση μπορεί να αναλυθεί στις διαδοχικές φάσεις  $P^+ \rightarrow P_1(u_1, 0) \rightarrow P_2(u_2, -z_p^+) \rightarrow P_3(u_3, 0) \rightarrow \hat{P}^+$ . Με διαδοχική εφαρμογή της εξίσωσης (4.3.2) λαμβάνουμε:

$$\frac{u_1 - u_p^+}{u_y} = 0 - z_p^+ {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta - \gamma) |z_p^+|^n\right) \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{u_2 - u_1}{u_y} = -z_p^+ {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta + \gamma) |-z_p^+|^n\right) - 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{u_3 - u_2}{u_y} = 0 - \left[ -z_p^+ {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta - \gamma) |-z_p^+|^n\right) \right] \quad (\text{C.3})$$

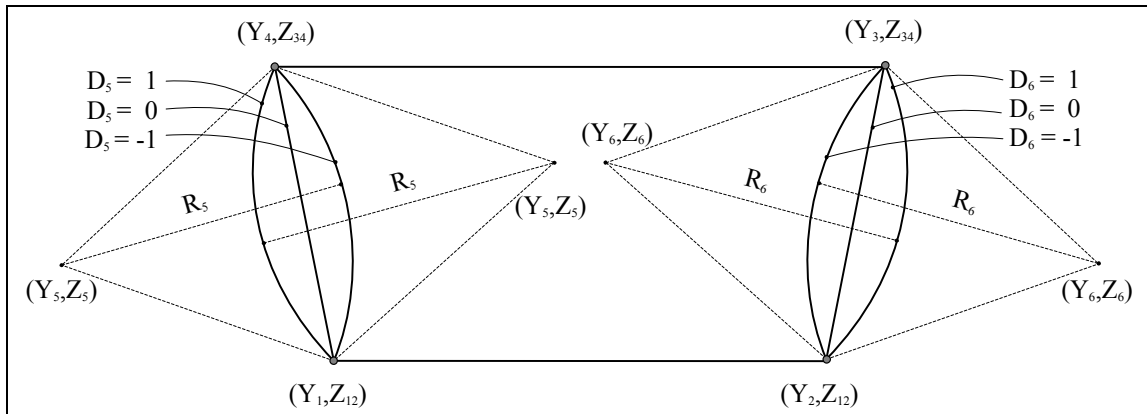
$$\frac{\hat{u}_p^+ - u_3}{u_y} = z_p^+ {}_2F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; (\beta + \gamma) |z_p^+|^n\right) - 0 \quad (\text{C.4})$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις (C.1) ως (C.4) κατά μέλη προκύπτει  $\hat{u}_p^+ = u_p^+$ . Συνεπώς,  $\hat{P}^+ = P^+$ .

[ΚΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ]

## Παράρτημα D: Βασικά επιφανειακά ολοκληρώματα καμπυλόγραμμων τραπεζίων

Για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται να υλοποιήσει τον προτεινόμενο αλγόριθμο του κεφαλαίου 6, παρακάτω παρατίθενται οι σχέσεις υπολογισμού των βασικών ολοκληρωμάτων των καμπυλόγραμμων τραπεζίων. Υπάρχουν εννέα δυνατοί συνδυασμοί των πλαϊνών ακμών ενός καμπυλόγραμμου τραpezίου. Το είδος της ακμής καθορίζεται από τις μεταβλητές  $D_5$  και  $D_6$ , όπως φαίνεται στην εικόνα:



Εικόνα D.1: Καμπυλόγραμμο τραπέζιο

Ορίζονται τριών ειδών ολοκληρώματα: το «μεσαίο» ολοκλήρωμα, το οποίο αναφέρεται στο απλό τραπέζιο με ευθείες πλαϊνές ακμές, καθώς και το «αριστερό» και το «δεξί» ολοκλήρωμα, τα οποία αναφέρονται στο αντίστοιχο πεδίο που καθορίζεται μεταξύ του κυκλικού τόξου και της χορδής (αν υπάρχει). Θεωρώντας ότι  $L_{14} = (y_4 - y_1)/(z_{34} - z_{12})$ ,  $L_{23} = (y_3 - y_2)/(z_{34} - z_{12})$  με  $z_{34} > z_{12}$ , το «μεσαίο» ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$I_{(m,n)}^{j,mid} = \int_{z_{12}}^{z_{34}} \left( \int_{y_1 + L_{14}(z - z_{12})}^{y_2 + L_{23}(z - z_{12})} (y^m z^n) dy \right) dz$$

Συνεπώς:

$$I_{(0,n)}^{j,mid} = \frac{1}{n+2}(L_{23} - L_{14})(z_{34}^{n+2} - z_{12}^{n+2}) + \frac{1}{n+1}(y_2 - L_{23}z_{12} - y_1 + L_{14}z_{12})(z_{34}^{n+1} - z_{12}^{n+1})$$

$$A = \frac{1}{2}(L_{23}^2 - L_{14}^2)$$

$$B = (y_2 - L_{23}z_{12})L_{23} - (y_1 - L_{14}z_{12})L_{14}$$

$$C = \frac{1}{2}((y_2 - L_{23}z_{12})^2 - (y_1 - L_{14}z_{12})^2)$$

$$I_{(1,n)}^{j,mid} = \frac{A}{n+3}(z_{34}^{n+3} - z_{12}^{n+3}) + \frac{B}{n+2}(z_{34}^{n+2} - z_{12}^{n+2}) + \frac{C}{n+1}(z_{34}^{n+1} - z_{12}^{n+1})$$

Το «αριστερό» και το «δεξιό» ολοκλήρωμα είναι ίσα με το μηδέν στην περίπτωση που η αντίστοιχη πλαϊνή ακμή είναι ευθεία γραμμή. Σε αντίθετη περίπτωση, τα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν για διάφορες τιμές των εκθετών  $m, n$  χρησιμοποιώντας συμβολικό προγραμματισμό ως εξής:

$$I_{(m,n)}^{j,left} = \int_{z_{12}}^{z_{34}} \left( \int_{y_5 - D_5 \sqrt{R_5^2 - (z - z_5)^2}}^{y_1 + L_{14}(z - z_{12})} (y^m z^n) dy \right) dz$$

$$I_{(m,n)}^{j,right} = \int_{z_{12}}^{z_{34}} \left( \int_{y_2 + L_{23}(z - z_{12})}^{y_6 + D_6 \sqrt{R_6^2 - (z - z_6)^2}} (y^m z^n) dy \right) dz$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι ίσο με το άθροισμα των τριών επιμέρους ολοκληρωμάτων:

$$I_{(m,n)}^j = I_{(m,n)}^{j,left} + I_{(m,n)}^{j,mid} + I_{(m,n)}^{j,right}$$

Για παράδειγμα, για  $D_5 = 1$  το «αριστερό» ολοκλήρωμα προκύπτει με βάση τις σχέσεις:

$$A_{12} = \arcsin \left( \frac{z_5 - z_{12}}{R_5} \right)$$

$$A_{34} = \arcsin \left( \frac{z_5 - z_{34}}{R_5} \right)$$



$$S_{12} = \sqrt{(R_5^2 + 2z_5 z_{12} - z_5^2 - z_{12}^2)}$$

$$S_{34} = \sqrt{(R_5^2 + 2z_5 z_{34} - z_5^2 - z_{34}^2)}$$

$$\begin{aligned} I_{(0,0)}^{j,left} &= -y_1 z_{12} + \frac{1}{2} L_{14} z_{12}^2 + y_5 z_{12} - \frac{1}{2} S_{12} z_{12} + \frac{1}{2} S_{12} z_5 + \frac{1}{2} R_5^2 A_{12} + y_1 z_{34} \\ &+ \frac{1}{2} L_{14} z_{34}^2 - L_{14} z_{34} z_{12} - y_5 z_{34} + \frac{1}{2} S_{34} z_{34} - \frac{1}{2} S_{34} z_5 - \frac{1}{2} R_5^2 A_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{(0,1)}^{j,left} &= \frac{1}{3} S_{12}^3 - \frac{1}{2} y_1 z_{12}^2 - \frac{1}{2} S_{12} z_5 z_{12} + \frac{1}{2} y_5 z_{12}^2 + \frac{1}{2} S_{12} z_5^2 + \frac{1}{2} z_5 R_5^2 A_{12} \\ &+ \frac{1}{6} L_{14} z_{12}^3 - \frac{1}{3} S_{34}^3 + \frac{1}{2} z_5 S_{34} z_{34} - \frac{1}{2} S_{34} z_5^2 - \frac{1}{2} z_5 R_5^2 A_{34} + \frac{1}{3} L_{14} z_{34}^3 \\ &+ \frac{1}{2} z_{34}^2 y_1 - \frac{1}{2} z_{34}^2 L_{14} z_{12} - \frac{1}{2} z_{34}^2 y_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{(0,2)}^{j,left} &= \frac{1}{8} R_5^2 S_{12} z_5 - \frac{1}{2} S_{12} z_5^2 z_{12} - \frac{1}{8} R_5^2 S_{12} z_{12} + \frac{1}{8} R_5^4 A_{12} - \frac{1}{8} R_5^4 A_{34} \\ &+ \frac{1}{3} z_{34}^3 y_1 - \frac{1}{3} z_{34}^3 y_5 + \frac{1}{4} L_{14} z_{34}^4 - \frac{1}{4} z_{34} S_{34}^3 - \frac{5}{12} z_5 S_{34}^3 - \frac{1}{2} S_{34} z_5^3 \\ &+ \frac{1}{12} L_{14} z_{12}^4 - \frac{1}{3} y_1 z_{12}^3 + \frac{1}{2} z_5^2 R_5^2 A_{12} + \frac{1}{2} S_{12} z_5^3 + \frac{1}{4} S_{12}^3 z_{12} + \frac{5}{12} z_5 S_{12}^3 \\ &- \frac{1}{2} z_5^2 R_5^2 A_{34} + \frac{1}{8} R_5^2 S_{34} z_{34} - \frac{1}{8} R_5^2 S_{34} z_5 - \frac{1}{3} z_{34}^3 L_{14} z_{12} + \frac{1}{2} z_5^2 S_{34} z_{34} + \frac{1}{3} y_5 z_{12}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{(0,3)}^{j,left} &= -\frac{1}{2} z_5^3 R_5^2 A_{34} - \frac{3}{8} z_5 R_5^4 A_{34} - \frac{1}{2} S_{12} z_5^3 z_{12} + \frac{3}{8} R_5^2 S_{12} z_5^2 + \frac{1}{2} z_5^3 S_{34} z_{34} \\ &- \frac{3}{8} R_5^2 S_{34} z_5^2 + \frac{7}{20} z_5 S_{12}^3 z_{12} - \frac{1}{4} z_{34}^4 y_5 + \frac{3}{8} z_5 R_5^4 A_{12} + \frac{1}{2} z_5^3 R_5^2 A_{12} + \frac{1}{20} L_{14} z_{12}^5 \\ &- \frac{1}{4} y_1 z_{12}^4 + \frac{1}{4} y_5 z_{12}^4 + \frac{1}{5} S_{12}^3 z_{12}^2 + \frac{2}{15} R_5^2 S_{12}^3 + \frac{9}{20} z_5^2 S_{12}^3 - \frac{2}{15} R_5^2 S_{34}^3 - \frac{1}{5} z_{34}^2 S_{34}^3 \\ &- \frac{9}{20} z_5^2 S_{34}^3 - \frac{3}{8} R_5^2 S_{12} z_5 z_{12} - \frac{7}{20} z_5 z_{34} S_{34}^3 + \frac{1}{2} S_{12} z_5^4 - \frac{1}{2} S_{34} z_5^4 - \frac{1}{4} z_{34}^4 L_{14} z_{12} \\ &+ \frac{1}{4} z_{34}^4 y_1 + \frac{1}{5} L_{14} z_{34}^5 + \frac{3}{8} z_5 R_5^2 S_{34} z_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{(0,4)}^{j,left} = & -\frac{3}{4}z_5^2R_5^4A_{34} - \frac{1}{2}z_5^4R_5^2A_{34} + \frac{1}{16}R_5^4S_{34}z_{34} - \frac{3}{4}R_5^2S_{34}z_5^3 + \frac{1}{2}z_5^4S_{34}z_{34} \\
 & - \frac{1}{16}R_5^4S_{12}z_{12} + \frac{1}{16}R_5^4S_{12}z_5 - \frac{1}{2}S_{12}z_5^4z_{12} + \frac{3}{4}R_5^2S_{12}z_5^3 + \frac{3}{4}z_5^2R_5^4A_{12} \\
 & + \frac{1}{2}z_5^4R_5^2A_{12} - \frac{1}{8}R_5^2z_{34}S_{34}^3 - \frac{49}{120}z_5R_5^2S_{34}^3 - \frac{3}{10}z_5z_{34}^2S_{34}^3 - \frac{2}{5}z_5^2z_{34}S_{34}^3 \\
 & + \frac{3}{10}z_5S_{12}^3z_{12}^2 + \frac{49}{120}z_5R_5^2S_{12}^3 + \frac{1}{8}R_5^2S_{12}^3z_{12} + \frac{2}{5}z_5^2S_{12}^3z_{12} - \frac{1}{16}R_5^4S_{34}z_5 \\
 & - \frac{3}{4}R_5^2S_{12}z_5^2z_{12} + \frac{3}{4}z_5^2R_5^2S_{34}z_{34} - \frac{1}{16}R_5^6A_{34} - \frac{1}{6}z_{34}^3S_{34}^3 - \frac{7}{15}z_5^3S_{34}^3 \\
 & + \frac{1}{5}z_{34}^5y_1 - \frac{1}{5}z_{34}^5 \cdot y_5 + \frac{1}{6}S_{12}^3z_{12}^3 + \frac{7}{15}z_5^3S_{12}^3 - \frac{1}{2}S_{34}z_5^5 - \frac{1}{5}z_{34}^5L_{14}z_{12} \\
 & + \frac{1}{6}L_{14}z_{34}^6 + \frac{1}{2}S_{12}z_5^5 + \frac{1}{16}R_5^6A_{12} + \frac{1}{30}L_{14}z_{12}^6 - \frac{1}{5}y_1z_{12}^5 + \frac{1}{5}y_5z_{12}^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{(1,0)}^{j,left} = & -\frac{1}{2}y_5R_5^2A_{34} + \frac{1}{2}y_5R_5^2A_{12} - \frac{1}{2}y_5S_{34}z_5 + \frac{1}{2}y_5S_{34}z_{34} + \frac{1}{2}y_5S_{12}z_5 \\
 & - \frac{1}{2}y_5S_{12}z_{12} + \frac{1}{6}L_{14}^2z_{34}^3 - \frac{1}{2}y_1^2z_{12} + \frac{1}{2}y_1^2z_{34} - \frac{1}{2}L_{14}^2z_{34}^2z_{12} + \frac{1}{2}L_{14}^2z_{34}z_{12}^2 \\
 & + \frac{1}{2}y_1L_{14}z_{34}^2 - \frac{1}{6}L_{14}^2z_{12}^3 - \frac{1}{2}z_{12}z_5^2 + \frac{1}{2}y_5^2z_{12} + \frac{1}{2}z_5z_{12}^2 + \frac{1}{2}z_{12}R_5^2 + \frac{1}{6}z_{34}^3 \\
 & - \frac{1}{6}z_{12}^3 + \frac{1}{2}L_{14}y_1z_{12}^2 - y_1L_{14}z_{34}z_{12} - \frac{1}{2}R_5^2z_{34} - \frac{1}{2}z_{34}^2z_5 + \frac{1}{2}z_5^2z_{34} - \frac{1}{2}y_5^2z_{34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{(1,1)}^{j,left} = & \frac{1}{3}y_5S_{12}^3 + \frac{1}{4}z_{34}^2L_{14}^2z_{12}^2 + \frac{1}{3}L_{14}z_{34}^3y_1 - \frac{1}{3}L_{14}^2z_{34}^3z_{12} - \frac{1}{2}y_5z_5R_5^2A_{34} \\
 & + \frac{1}{3}z_5z_{12}^3 + \frac{1}{4}R_5^2z_{12}^2 - \frac{1}{4}z_5^2z_{12}^2 - \frac{1}{24}L_{14}^2z_{12}^4 - \frac{1}{4}y_1^2z_{12}^2 + \frac{1}{4}y_5^2z_{12}^2 - \frac{1}{3}z_{34}^3z_5 \\
 & - \frac{1}{8}z_{12}^4 - \frac{1}{3}y_5S_{34}^3 + \frac{1}{8}z_{34}^4 + \frac{1}{4}z_{34}^2y_1^2 - \frac{1}{4}z_{34}^2y_5^2 - \frac{1}{4}z_{34}^2R_5^2 + \frac{1}{4}z_{34}^2z_5^2 \\
 & + \frac{1}{2}y_5z_5S_{34}z_{34} - \frac{1}{2}y_5S_{12}z_5z_{12} - \frac{1}{2}z_{34}^2y_1L_{14}z_{12} + \frac{1}{2}y_5S_{12}z_5^2 + \frac{1}{6}L_{14}y_1z_{12}^3 \\
 & + \frac{1}{2}y_5z_5R_5^2A_{12} + \frac{1}{8}L_{14}^2z_{34}^4 - \frac{1}{2}y_5S_{34}z_5^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{(1,2)}^{j,left} &= \frac{1}{6} z_{34}^3 L_{14}^2 z_{12}^2 - \frac{1}{2} y_5 z_5^2 R_5^2 A_{34} + \frac{1}{2} y_5 z_5^2 R_5^2 A_{12} - \frac{1}{8} y_5 R_5^4 A_{34} \\
 &+ \frac{1}{8} y_5 R_5^4 A_{12} - \frac{1}{8} y_5 R_5^2 S_{12} z_{12} + \frac{1}{2} y_5 S_{12} z_5^3 - \frac{1}{2} y_5 S_{34} z_5^3 + \frac{1}{8} y_5 R_5^2 S_{12} z_5 \\
 &- \frac{1}{10} z_{12}^5 - \frac{1}{2} y_5 S_{12} z_5^2 z_{12} - \frac{1}{8} y_5 R_5^2 S_{34} z_5 + \frac{1}{8} y_5 R_5^2 S_{34} z_{34} + \frac{5}{12} y_5 z_5 S_{12}^3 \\
 &+ \frac{1}{4} y_5 S_{12}^3 z_{12} - \frac{1}{4} y_5 z_{34} S_{34}^3 - \frac{1}{6} z_{34}^3 R_5^2 + \frac{1}{6} z_{34}^3 z_5^2 + \frac{1}{6} z_{34}^3 y_1^2 \\
 &- \frac{1}{6} z_{34}^3 y_5^2 - \frac{5}{12} y_5 z_5 S_{34}^3 + \frac{1}{2} y_5 z_5^2 S_{34} z_{34} - \frac{1}{60} L_{14}^2 z_{12}^5 + \frac{1}{10} z_{34}^5 \\
 &+ \frac{1}{12} L_{14} y_1 z_{12}^4 + \frac{1}{10} L_{14}^2 z_{34}^5 - \frac{1}{6} y_1^2 z_{12}^3 + \frac{1}{6} y_5^2 z_{12}^3 - \frac{1}{3} z_{34}^3 y_1 L_{14} z_{12} \\
 &- \frac{1}{4} z_{34}^4 z_5 - \frac{1}{4} L_{14}^2 z_{34}^4 z_{12} + \frac{1}{4} L_{14} z_{34}^4 y_1 + \frac{1}{4} z_5 z_{12}^4 + \frac{1}{6} R_5^2 z_{12}^3 - \frac{1}{6} z_5^2 z_{12}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{(1,3)}^{j,left} &= \frac{1}{2} y_5 S_{12} z_5^4 - \frac{1}{2} y_5 S_{34} z_5^4 + \frac{1}{5} y_5 S_{12}^3 z_{12}^2 + \frac{2}{15} y_5 R_5^2 S_{12}^3 \\
 &- \frac{3}{8} y_5 z_5 R_5^4 A_{34} + \frac{9}{20} y_5 z_5^2 S_{12}^3 - \frac{1}{2} y_5 z_5^3 R_5^2 A_{34} - \frac{1}{4} z_{34}^4 y_1 L_{14} z_{12} \\
 &- \frac{1}{12} z_{12}^6 - \frac{1}{5} y_5 z_{34}^2 S_{34}^3 - \frac{2}{15} y_5 R_5^2 S_{34}^3 - \frac{9}{20} y_5 z_5^2 S_{34}^3 \\
 &+ \frac{1}{2} y_5 R_5^2 z_5^3 A_{12} + \frac{3}{8} y_5 z_5 R_5^4 A_{12} + \frac{1}{8} z_{34}^4 L_{14}^2 z_{12}^2 - \frac{1}{5} L_{14}^2 z_{34}^5 z_{12} \\
 &+ \frac{1}{5} L_{14} z_{34}^5 y_1 + \frac{1}{12} z_{34}^6 + \frac{3}{8} y_5 R_5^2 S_{12} z_5^2 - \frac{1}{2} y_5 S_{12} z_5^3 z_{12} - \frac{1}{5} z_{34}^5 z_5 \\
 &+ \frac{1}{12} L_{14}^2 z_{34}^6 + \frac{3}{8} y_5 z_5 R_5^2 S_{34} z_{34} - \frac{3}{8} y_5 R_5^2 S_{12} z_5 z_{12} + \frac{1}{8} R_5^2 z_{12}^4 \\
 &- \frac{1}{8} z_5^2 z_{12}^4 + \frac{1}{5} z_5 z_{12}^5 - \frac{1}{8} z_{34}^4 R_5^2 + \frac{1}{8} z_{34}^4 z_5^2 + \frac{1}{8} z_{34}^4 y_1^2 - \frac{1}{8} z_{34}^4 y_5^2 \\
 &+ \frac{1}{2} y_5 z_5^3 S_{34} z_{34} - \frac{3}{8} y_5 R_5^2 S_{34} z_5^2 + \frac{7}{20} y_5 z_5 S_{12}^3 z_{12} - \frac{7}{20} y_5 z_5 z_{34} S_{34}^3 \\
 &- \frac{1}{120} L_{14}^2 z_{12}^6 + \frac{1}{20} L_{14} y_1 z_{12}^5 - \frac{1}{8} y_1^2 z_{12}^4 + \frac{1}{8} y_5^2 z_{12}^4
 \end{aligned}$$

[ΚΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ]

# Βιβλιογραφία



### **Κεφάλαια 1, 2 & 3**

- [1] Wen, Y.-K. (1976) "Method for random vibration of hysteretic systems", J. Engrg. Mech. Div., ASCE, 102(2):249-263.
- [2] Visintin, A. "Differential models of hysteresis", Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [3] Ewing, J.A. (1882) Proc. Roy. Soc. 220:39.
- [4] Panoskaltzis, V.P. "Rate effects in the constitutive modelling of concrete and geomaterials including plasticity and damage", PhD Dissertation, University of California at Berkeley, Berkeley, California, 1992.
- [5] Bouc, R. (1966) "Solution périodique de l' equation de la ferorrésonance avec hysteresis", C. R. Acad. Sci. Paris Serie A, 263:497-499.
- [6] Bouc, R. (1967) "Forced vibration of mechanical systems with hysteresis", Proceedings of the Fourth Conference on Non-linear oscillation, Prague, Czechoslovakia.
- [7] Bouc, R. (1969) "Modèle mathématique d' hystérésis et application aux systèmes à un degré de liberté", Thèse, Marseille, 1969.
- [8] Bouc, R. (1969) "Modèle mathématique d' hystérésis. Application au circuit oscillant à self saturable", Cinquième Congrès Oscillations Non-Linéaires, 4:100-112, Kiev.
- [9] Bouc, R. (1971) "Modèle mathématique d' hystérésis", Acustica, 24:16-25.
- [10] Krasnosel'skiï, M.A., Pokrovskiï, A.V. "Systems with hysteresis", Springer, Berlin 1983. Russian edition: Nauka, Moscow, 1983.
- [11] Brokate, M., Sprekels, J. "Hysteresis and Phase Transitions", Applied Mathematical Sciences 121, Springer, New York, 1996.
- [12] Mayergoyz, I.D. "Mathematical models of hysteresis", Springer-Verlag, New York, 1991.

- [13] Mayergoyz, I.D. "Mathematical Models of Hysteresis and their Applications: Second Edition (Electromagnetism)", Academic Press, 2003.
- [14] Preisach, F.Z. (1935), Z. Phys. 94:277.
- [15] Masing, G. (1926) "Eigenspannungen und verfestigung beim messing self stretching and hardening for brass." Proc., 2nd Int. Congress for Applied Mechanics, Zurich, Switzerland, 332–335 (in German).
- [16] Jayakumar, P. (1987) "Modeling and identification in structural dynamics.", PhD Dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- [17] Iwan, W.D. (1967) "On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems.", J. Appl. Mech., 34(3):612–617.
- [18] Erlicher, S. (2003) "Hysteretic degrading models for the low-cycle fatigue behaviour of structural elements: theory, numerical aspects and applications", PhD Thesis, Department of Mechanical and Structural Engineering, University of Trento, Italy, 2003.
- [19] Clough, R.W., Johnston, S.B. (1966) "Effect of stiffness degradation on earthquake ductility requirements", Proceedings of the Japan Earthquake Engineering Symposium, Tokyo, Japan.
- [20] Riddell, R., Newmark, N.M. (1979) "Force-deformation models for non-linear analysis", J. Struct. Div., 105:ST12:2773-2778.
- [21] Filippou, F., Issa, A. (1988) "Nonlinear analysis of reinforced concrete frames under cyclic load reversals", University of California, Berkeley, Earthquake Engineering Research Center, Report No. UCB/EERC–88/12.
- [22] Anagnostopoulos, S.A. (1972) "Nonlinear dynamic response and ductility requirements of building structures subjected to earthquakes", Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, Res. Rep. R72-54.



- [23] Wang, M.-L., Shah, S.P. (1987) "Reinforced concrete hysteresis model based on the damage concept", *Earthq. Engng. and Struct. Dynamics*, 15:993-1003.
- [24] Takeda, T., Sozen, M.A., Nielsen, N.N. (1970) "R/C response to simulated earthquakes", *Am. Soc. Civ. Engrs, J. Struct. Div.*, 96(ST12):2557-2573.
- [25] Otani, A. (1974) "Inelastic analysis of R/C frame structures", *Am. Soc. Civ. Engrs, J. Struct. Div.*, 100(ST7):1433-1449.
- [26] Litton, R.W. (1975) "A contribution to the analysis of concrete structures under cyclic loading", Dept of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA, PhD Thesis.
- [27] Saiidi, M., Sozen, M.A. (1979) "Simple and complex models for nonlinear seismic response of R/C structures", *Civil Engineering Studies*, University of Illinois, Urbana, IL, *Struct. Res. Series* 465.
- [28] Mahin, S., Lin, J. (1983) "Construction of inelastic response spectra by single-degree-of-freedom systems. Computer programs and applications", Technical report UCB/EERC-83/17, University of California, Earthquake Engineering Research Center, Berkeley, CA.
- [29] Roufaiel, M.S.L., Meyer, C. (1987) "Analytical modeling of hysteretic behavior of R/C frames", *Am. Soc. Civ. Engrs. J. Struct. Engng.*, 113:429-444.
- [30] Chung, Y.S., Meyer, C., Shinozuka, M. (1987) "Seismic damage assessment of reinforced concrete members", National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York, Buffalo, NY, *Tech. Rep. NCEER-87-0022*.
- [31] Park, Y.J., Reinhorn, A.M., Kunnath, S.K. (1987) "IDARC: Inelastic damage analysis of reinforced concrete frame-shear wall structures", National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York, Buffalo, NY, *Tech. Rep. NCEER-87-0008*.

- [32] Reinhorn, A.M., Kunnath, S.K., Panahshahi, N. (1988) "Modelling of RC building structures with flexible floor diaphragms (IDARC 2)", National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York, Buffalo, NY, Tech. Rep. NCEER-88-0035.
- [33] Mostaghel, N. (1999) "Analytical description of pinching, degrading hysteretic systems", *J Engrg Mech, ASCE*, 125(2):216-224.
- [34] Costa, A.C., Costa, A.G. (1987) "Hysteretic model of force-displacement relationships for seismic analysis of structures", National Laboratory for Civil Engineering, Lisbon.
- [35] Coelho, E., Carvalho, E.C. (1990) "Nonlinear seismic behaviour of reinforced concrete structures", *Proc. 9<sup>th</sup> Europ. Conf. on Earthq. Engng.*, Moscow.
- [36] Eligehausen, R., Popov, E., Bertero, B. (1983) "Local bond stress-strain relationships of deformed bars under generalized excitations", University of California, Earthquake Engineering Research Center, Berkeley, CA, Technical report, Rep. No. UCB/EERC-83/23.
- [37] Salari, M.R., Spacone, E. (2001) "Analysis of steel-concrete composite frames with bond-slip", *Journal of Structural Engineering*, 127(11):1243-1250.
- [38] Weisstein, E.W. "Bézier Curve." From MathWorld--A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/BezierCurve.html>.
- [39] Elnashai, A.S., Elghazouli, A.Y. (1993) "Performance of composite steel/concrete members under earthquake loading. Part I: Analytical model", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 22:315-345.
- [40] Abramowitz, M., Stegun, I.A. (Eds.) "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables", 9th printing, New York: Dover, 1972.
- [41] Volterra, V. (1928) "Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 7(3):249-298.

- [42] Weisstein, E.W. "Lebesgue-Stieltjes Integral." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Lebesgue-StieltjesIntegral.html>
- [43] Foliente, G.C. (1995) "Hysteresis Modeling of Wood Joints and Structural Systems", Journal of Structural Engineering, ASCE, 121(6):1013-1022.
- [44] Foliente, G.C., Singh, M.P., Noori, M.N. (1996) "Equivalent linearization of generally pinching hysteretic, degrading systems", Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 25(6):611-629.
- [45] Sivaselvan, M.V., Reinhorn, A.M. (1999) "Hysteretic models for cyclic behaviour of deteriorating inelastic structures", Tech Rep MCEER-99-0018, Multidisciplinary Ctr. for Earthquake Engrg. Res., State University of New York at Buffalo, Buffalo, N.Y.
- [46] Sivaselvan, M.V., Reinhorn, A.M. (2000) "Hysteretic models for deteriorating inelastic structures", J. Engrg. Mech., ASCE, 126(6):633-640.
- [47] Wang, C., Foliente, G.C. (2001) "Hysteretic models for deteriorating inelastic structures", J. Engrg. Mech., ASCE, 127(11):1200-1202.
- [48] Weisstein, E.W. "Normal Distribution." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/NormalDistribution.html>
- [49] Oliveira, F. "Sobolev Space." From MathWorld--A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. <http://mathworld.wolfram.com/SobolevSpace.html>
- [50] Drucker, D.C. (1950) "Some implications of work hardening and ideal plasticity", Quart. J. Appl. Math., 7:411-418.
- [51] Lemaitre, J., Chaboche, J.-L. "Mécanique des matériaux solides", Dunod, Paris, 2<sup>nd</sup> edition, 1996.
- [52] Wen, Y.-K. (1980) "Equivalent linearization for hysteretic system under random excitation", Journal of Applied Mechanics, 47:150-154.

- [53] Baber, T.T., Wen, Y.-K. (1981) "Random vibration of hysteretic, degrading systems", Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, 107(6):1069-1087.
- [54] Baber, T.T., Noori, M.-N. (1985) "Random vibration of degrading pinching systems", Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, 11(8):1010-1026.
- [55] Baber, T.T., Noori, M.-N. (1986) "Modelling general hysteresis behavior and random vibration application", Journal of Vibration, Acoustic, Stress and Reliability in Design, 108:411-420.

#### **Κεφάλαιο 4**

- [56] Weisstein, E.W. "Hypergeometric Function." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/HypergeometricFunction.html>
- [57] Charalampakis, A.E., Koumouisis, V.K. (2008) "On the response and dissipated energy of Bouc-Wen hysteretic model", Journal of Sound and Vibration, 309:887-895, doi:10.1016/j.jsv.2007.07.080.
- [58] Erlicher, S., Point, N. (2004) "Thermodynamic admissibility of Bouc-Wen type hysteresis models", C. R. Mécanique, 332:51-57.
- [59] Lubliner, J., Panoskaltsis, V.P. (1992) "The modified Kuhn model of linear viscoelasticity", International Journal of Solids and Structures, 29(24):3099-3112.
- [60] Panoskaltsis, V.P., Papoulia, K.D., Bahuguna, S., Korovajchuk, I. (2007) "The generalized Kuhn model of linear viscoelasticity.", Mech. Time-Depend. Mater., 11:217-230.
- [61] Ikhouane, F., Rodellar, J. (2005) "On the Hysteretic Bouc-Wen Model, Part I: Forced Limit Cycle Characterization", Nonlinear Dynamics, 42:63-78.

- [62] Ma, F., Zhang, H., Bockstedte, A., Foliente, G.C., Paevere, P. (2004) "Parameter Analysis of the Differential Model of Hysteresis", *Journal of Applied Mechanics ASME*, 71:342–349, doi:10.1115/1.1668082.
- [63] Mathematica® 6.0 user manual, ©1998-2007 Wolfram Research.
- [64] Naiem, F., Kelly, J.M. "Design of Seismic Isolated Structures", Wiley, New York, 1999.
- [65] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P. "Numerical recipes in C++: the art of scientific computing", Cambridge University Press, 2002.
- [66] Rowland, T., Weisstein, E.W., "Bolzano-Weierstrass Theorem." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Bolzano-WeierstrassTheorem.html>.
- [67] Κατσικαδέλης, Ι. "Δυναμική των Κατασκευών ΙΙ", Συμμετρία, Αθήνα, 2005.
- [68] Thyagarajan, R.S. (1989) "Modeling and analysis of hysteretic structural behavior", Rep. No. EERL-89-03, Earthquake Engineering Research Lab., California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- [69] ZunZun.com, Interactive 2-Dimensional and 3-Dimensional Data Modeling. [www.zunzun.com](http://www.zunzun.com).
- [70] Valanis, K. C. (1971) "A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface. Part I. General Theory", *Archives of Mechanics*, 23(4):517—533.
- [71] Drucker, D.C. (1950) "Some implications of work hardening and ideal plasticity", *Quart. Appl. Math.*, 7:411-418.
- [72] Il'iushin, A.A. (1961) "On the postulate of plasticity", *Prikl. Math. Mekh.*, 25:503-507.
- [73] Dafalias, Y.F. (1977) "Il'iushin's postulate and resulting thermodynamic conditions on elasto-plastic coupling", *Int. J. Solids Structures*, 13:239-251.

- [74] Sandler, I.S. (1978) "On the uniqueness and stability of endochronic theories of material behavior", *J. Appl. Mech.*, 45:263–266.
- [75] Casciati, F. (1987) "Non-linear stochastic dynamics of large structural system by equivalent linearization", *Proc. ICASP5 (Int. Conf. on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering)*, Vancouver, 1987, pp. 1165-1172.
- [76] Carli, F. (1999) "Nonlinear response of hysteretic oscillator under evolutionary excitation", *Advances in Engineering Software*, 30:621-630.
- [77] Thyagarajan, R.S (1989) "Modeling and analysis of hysteretic structural behavior", Rep. No. EERL-89-03, Earthquake Engineering Research Lab., California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- [78] Spacone E., Ciampi, V., Philippou, F.C. (1992) "A Beam Element for Seismic Damage Analysis", Rep. No. UCB/EERC-92/07, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
- [79] Wong, C.W. , Ni, Y.Q., Ko, J.M. (1994) "Steady-State Oscillation of Hysteretic Differential Model. II: Performance Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, 120(11):2299-2325.
- [80] Casciati, F. (1989) "Stochastic dynamics of hysteretic media", *Structural Safety*, 6:259-269.
- [81] Casciati, F., Faravelli, L., Singh, M.P. (1986) "Non-linear structural response and modeling uncertainty on system parameters and seismic excitation", *Proc. 8th ECEE*, Lisbon, 6.3, pp. 41-48.
- [82] Valanis, K.C. (1981) "On the substance of Rivlin's remarks on the endochronic theory", *Int. J. Solids Structures*, 17:249–265.
- [83] Sasani, M., Popov, E.P. (2001) "Seismic energy dissipators for RC Panels: Analytical studies", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 127(8):835–843.

- [84] Pacific earthquake engineering research centre (PEER). Strong ground motion database 2006; <http://peer.berkeley.edu/> .
- [85] Charalampakis, A.E., Koumousis, V.K. (2009) "A Bouc-Wen model compatible with plasticity postulates", Journal of Sound and Vibration, in Press, doi:10.1016/j.jsv.2008.11.017.
- [86] Katsaras, C.P., Panagiotakos, T.B., Koliass, B. (2008) "Restoring capability of bilinear hysteretic seismic isolation systems", Earthquake Engineering and Structural Dynamics; 37:557–575.

## **Κεφάλαιο 5**

- [87] Ljung, L. "System identification: Theory for the user", second edition, Prentice Hall PTR, 1999.
- [88] Goldberg, D.E. "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning", Addison-Wesley, Reading, MA, U.S.A., 1989.
- [89] Holland, J.H. "Adaptation in Natural and Artificial Systems", The University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975.
- [90] Mitchell, M. "An Introduction to Genetic Algorithms (Complex Adaptive Systems)", The MIT Press, 1998.
- [91] Eiben, A.E., Smith, J.E. "Introduction to Evolutionary Algorithms", Springer, 2003.
- [92] Koumousis, V.K. (1995) "Application of Genetic Algorithms in Optimal Structural design problems", 2nd Workshop of the European Group for Structural Engineering Applications of Artificial Intelligence (EG-SEA-AI), Bergamo, Italy, 1995.
- [93] Koumousis, V.K., Arsenis, S.J., Vasiloglou, V.B. (1993) "Detailed Design of Reinforced Concrete Buildings using Logic Programming", Proceedings of the 3rd International

- Conference on the Applications of Artificial Intelligence in Civil and Structural Engineering, Edinburgh, 1993.
- [94] Koumousis, V.K., Georgiou P.G. (1992) "Genetic algorithms in discrete optimization of steel truss roofs", Proc. of the 1st Conference of Computational Mech. Assoc. of Greece, Athens, 1992.
- [95] Ponterosso P., Fishwick R.J., Fox, D.S.J., Liu, X.L., Begg, D.W. (2000) "Masonry arch collapse loads and mechanisms by heuristically seeded genetic algorithm", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(8-10):1233-1243.
- [96] Δήμου, Χ.Κ. (2004) "Βέλτιστος Σχεδιασμός Κατασκευών με Περιορισμούς Αξιοπιστίας και χρήση Ανταγωνιστικών Γενετικών Αλγορίθμων", Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ.
- [97] Storn, R., Price, K. (1997) "Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces", Journal of Global Optimization, 11:341-359.
- [98] Kennedy, J., Eberhart, R.C. (1995) "Particle swarm optimization", Proc.IEEE Int. Conf. Neural Networks, Perth, Australia, 1942–1948.
- [99] Shi, Y.H., Eberhart, R.C. (1998) "A modified particle swarm optimizer", Proc. Int. Conf. on Evolutionary Computation, pp. 69–73.
- [100] Fourie, P.C., Groenwold, A.A. (2002) "The particle swarm optimization algorithm in size and shape optimization", Struct. Multidisc. Optim., 23:259–267.
- [101] Schutte, J.F., Groenwold, A.A. (2003) "Sizing design of truss structures using particle swarms", Struct. Multidisc. Optim., 25:261–269.
- [102] Fourie, P.C., Groenwold, A.A. (2000) "Particle swarms in size and shape optimization", Proc. Workshop on Multidisciplinary Design Optimization, Pretoria, 2000, 97-106.



- [103] Clerc, M., Kennedy, J (2002) "The Particle Swarm—Explosion, Stability, and Convergence in a Multidimensional Complex Space", *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(1):58-73.
- [104] Clerc, M. (1999) "The swarm and the queen: Towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization", *Proc. Congr. Evolutionary Computation*, Vol. 3, Washington DC, 1999, 1951–1957.
- [105] Vesterstrom, J., Thomsen, R. (2004) "A comparative study of differential evolution, particle swarm optimization, and evolutionary algorithms on numerical benchmark problems", *Congress on Evolutionary Computation, CEC2004*, 2:1980- 1987.
- [106] Paterlini, S., Krink, T. (2006) "Differential evolution and particle swarm optimisation in partitional clustering", *Computational Statistics & Data Analysis*, 50:1220 – 1247.
- [107] Krink, T., Filipic, B., Fogel, G.B. (2004) "Noisy optimization problems - a particular challenge for differential evolution?", *Congress on Evolutionary Computation, CEC2004*, 1:332- 339.
- [108] Carroll, D.L. (1996) "Chemical laser modelling with genetic algorithms", *AIAA J.* 34, 338–346.
- [109] Alan, C. "ODEpack, a Systemized Collection of ODE solvers", in: R. S. Stepleman et al. (eds.), *Hindmarsh Scientific Computing*, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [110] Constantinou, C., Adnane, M.A., "Dynamics of soil-base-isolated structure systems: evaluation of two models for yielding systems", *Report to NSAF, Department of civil engineering*, Drexel University, Philadelphia, PA 1987.
- [111] Kunnath, S.K., Mander, J.B., Fang, L. (1997) "Parameter identification for degrading and pinched hysteretic structural concrete systems", *Engineering Structures*, 19(3):224-232.

- [112] Ma, F., Ng, C.H., Ajavakom, N. (2006) "On system identification and response prediction of degrading structures", *Struct. Control Health Monit.*, 13:347–364, doi:10.1002/stc.122.
- [113] Ni, Y.Q., Ko, J.M., Wong, C.W. (1998) "Identification of non-linear hysteretic isolators from periodic vibration tests", *Journal of Sound and Vibration*, 217(4):737-756.
- [114] Sues, R.H., Mau, S.T., Wen, Y. (1988) "System identification of degrading hysteretic restoring forces", *Journal of Engineering Mechanics*, 114(5):833-846.
- [115] Zhang, H., Foliente, G.C., Yang, Y., Ma, F. (2002) "Parameter identification of inelastic structures under dynamic loads", *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, 31(5):1113-1130.
- [116] Yar, M., Hammond, J.K. (1987) "Parameter estimation for hysteretic systems", *Journal of Sound and Vibration*, 117(1):161-172.
- [117] Lin, J. -S, Zhang, Y. (1994) "Nonlinear structural identification using extended Kalman filter", *Computers and Structures*, 52(4):757-764.
- [118] Kwok, N.M., Ha, Q.P., Nguyen, M.T., Li, J., Samali, B. (2007) "Bouc-Wen model parameter identification for a MR fluid damper using computationally efficient GA", *ISA transactions*, 46:167-179.
- [119] Ha, J.-L., Kung, Y.-S., Fung, R.-F., Hsien, S.-C. (2006) "A comparison of fitness functions for the identification of a piezoelectric hysteretic actuator based on the real-coded genetic algorithm", *Sensors and Actuators A*, 132:643-650.
- [120] Kyprianou, A., Worden, K., Panet, M. (2001) "Identification of hysteretic systems using the Differential Evolution algorithm", *Journal of Sound and Vibration*, 248(2):289-314.
- [121] Ha, J.-L, Fung, R.-F., Yang, C.-S. (2005) "Hysteresis identification and dynamic responses of the impact drive mechanism", *Journal of Sound and Vibration*, 283:943-956.

- [122] Ye, M., Wang, X. (2007) "Parameter estimation of the Bouc–Wen hysteresis model using particle swarm optimization", *Smart Materials and Structures*, 16:2341-2349.
- [123] Koumouisis, V.K., Katsaras, C.P. (2006) "A Saw-Tooth Genetic Algorithm Combining the Effects of Variable Population Size and Reinitialization to Enhance Performance", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 10(1):19-28.
- [124] Goldberg, D.E. (1989) "Sizing populations for serial and parallel genetic algorithms", *Proceedings of the third International Conference on Genetic Algorithms (ICGA 89)*, pp.70-79.
- [125] Krishnakumar, K. (1989) "Micro-genetic algorithms for stationary and nonstationary function optimization", *Proc. SPIE Intelligent Control Adaptive Systems*, 1942-1948.
- [126] Chopra, A.K. "Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering", (2nd Edition), Prentice Hall, 2000.
- [127] Jennings, P.C. (1964) "Periodic Response of a General Yielding Structure", *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, 90(EM2):131–166.
- [128] Popov, E.P., Stephen, R.M. (1970) "Cyclic Loading of Full-Size Steel Connections", UCB/EERC-70/03.
- [129] Charalampakis, A.E., Koumouisis, V.K. (2006) "Parameter Estimation of Bouc-Wen Hysteretic Systems using Sawtooth Genetic Algorithm", *Proceedings of the Fifth International Conference on Engineering Computational Technology*, Las Palmas de Gran Canaria, Spain.
- [130] Charalampakis, A.E., Koumouisis, V.K. (2008) "Identification of Bouc-Wen hysteretic systems by a hybrid evolutionary algorithm", *Journal of Sound and Vibration*, 314:571-585, doi:10.1016/j.jsv.2008.01.018.

- [131] Smyth, A.W., Masri, S.F., Chassiakos, A.G., Caughey, T.K. (1999) "On-line parametric identification of mdof hysteretic systems", *Journal of Engineering Mechanics*, 125(2):133-142.
- [132] Yun, C.B., Shinozuka, M. (1980) "Identification of Nonlinear Structural Dynamic Systems", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 8(2):187-203.
- [133] Hoshiya, M., Saito, E. (1984) "Structural identification by Extended Kalman Filter", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 110:1757-1770.
- [134] Chatzi, E., Smyth, A.W. (2008) "The Unscented Kalman Filter and Particle Filter Methods for Nonlinear Structural System Identification with Non-Collocated Heterogeneous Sensing", *International Symposium on Structural Control and Health Monitoring*, National Chung Hsing University, Taichung, Taiwan, ROC, January 10-11, 2008.
- [135] Chassiakos, A.G., Masri, S.F., Smyth, A.W., Caughey, T.K. (1998) "On-line identification of hysteretic systems", *Journal of Applied Mechanics*, 65:194-203.
- [136] De Jong, K.A. (1975) "Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems", PhD dissertation, Univ. of Michigan.
- [137] Carroll, D.L. (1996) "Genetic algorithms and optimizing chemical oxygen-iodine, lasers", *Developments in Theoretical Applied Mechanics*, 18:411-424.
- [138] Kwon, Y.D., Kwon, S.B., Jin, S.B., Kim, J.Y. (2003) "Convergence enhanced genetic algorithm with successive zooming method for solving continuous optimization problems", *Computers & Structures*, 81:1715-1725.
- [139] Levenberg, K. (1944) "A method for the solution of certain problems in least squares", *Quart. Appl. Math.* 2:164-168.
- [140] Marquardt, D. (1963) "An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters", *SIAM J. Appl. Math.*, 11:431-441.

- [141] Nocedal, J., Wright, S.J., "Numerical Optimization", Springer, New York, 1999.
- [142] Moscato, P.A. (1989) "On Evolution, Search, Optimization, Genetic Algorithms and Martial Arts: Towards Memetic Algorithms", Tech. Rep. Caltech Concurrent Computation Program Report 826, Caltech, Pasadena, California.
- [143] Wolpert, D.H., Macready, W.G. (1997) "No Free Lunch Theorems for optimization", IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1(1):67-82.
- [144] National Institute of Standards and Technology "A summary of cyclic lateral load tests on rectangular reinforced concrete columns", NISTIR 5984, 1997.

## **Κεφάλαια 6 & 7**

- [145] Wang, C.-H., Chang, S.-Y. (2007) "Development and Validation of a Generalized Biaxial Hysteresis Model", ASCE Journal of Engineering Mechanics, 133(2):141-152.
- [146] Bonet, J.L., Romero, M.L., Miguel, P.F., Fernandez, M.A. (2004) "A fast stress integration algorithm for reinforced concrete sections with axial loads and biaxial bending", Computers and Structures, 82:213-225.
- [147] Brondum-Nielsen, T. (1985) "Ultimate flexural capacity of cracked polygonal concrete sections under biaxial bending", ACI Struct. J., 82(6):863-870.
- [148] Chen, C.-C., Lin, N.-J. (2006) "Analytical model for predicting axial capacity and behaviour of concrete encased steel composite stub columns", Journal of Constructional Steel Research, 62:424-433.
- [149] Chen, S.F., Teng, G., Chan, S.L. (2001) "Design of biaxially loaded short composite columns of arbitrary cross section", ASCE, Journal of Structural Engineering 127(6):678-685.
- [150] Comite Euro-International du Beton, "RC Frames Under Earthquake Loading", Thomas Telford Ltd, 1996.

- [151] Dafalias, Y.F. (1979) "A model of soil behaviour under monotonic and cyclic loading conditions", Transactions of Fifth International Conference on Structural Mechanics and Reactor Technology, K1/8, Berlin.
- [152] Dundar, C., Sahin, B. (1993) "Arbitrarily shaped reinforced concrete members subject to biaxial bending and axial load", Computers and Structures, 49(4):643-662.
- [153] Fafitis, A. (2001) "Interaction surfaces of reinforced-concrete sections in biaxial bending", ASCE, Journal of Structural Engineering, 127(7):840-6.
- [154] Kwan, K.H., Liaw, T.C. (1985) "Computerized ultimate strength analysis of reinforced concrete sections subjected to axial compression and biaxial bending", Computers and Structures, 21(6):1119-1127.
- [155] Mander, J.B., Priestley, M.J.N., Park, R. (1988) "Theoretical stress-strain model for confined concrete", Journal of Structural Engineering, 114(8):1804-26.
- [156] Rodriguez, J.A., Aristizabal-Ochoa, J.D. (1999) "Biaxial interaction diagrams for short RC columns of any cross section", Journal of Structural Engineering, ASCE, 125(6):672-683.
- [157] Rodriguez, J.A., Aristizabal-Ochoa, J.D. (2001) "M-P- $\phi$  diagrams for reinforced, partially and fully prestressed concrete sections under biaxial bending and axial load", Journal of Structural Engineering, ASCE, 127(7):763-773.
- [158] Rotter, J.M. (1985) "Rapid exact inelastic biaxial bending analysis", Journal of Structural Engineering, ASCE, 111(12):2659-2674.
- [159] Sfakianakis, M.G. (2002) "Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics", Advances in Engineering Software, 33:227-242.
- [160] Tsao, W.H., Hsu, C.T.T. (1993) "A nonlinear computer analysis of biaxially loaded L-Shaped slender reinforced concrete columns", Computers and Structures, 49(4):579-588.

- [161] Zupan, D., Saje, M. (2005) "Analytical integration of stress field and tangent material moduli over concrete cross-sections", *Computers and Structures*, 83(2005):2368-2380.
- [162] Sousa, J.B.M., Muniz, C.F.D.G. (2007) "Analytical integration of cross section properties for numerical analysis of reinforced concrete, steel and composite frames", *Engineering Structures*, 29(2007):618–625.
- [163] Bonet, J.L., Barros, M.H.F.M., Romero, M.L. (2006) "Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending", *Computers and Structures*, 84(2006):2184–2193.
- [164] De Vivo, L., Rosati, L. (1998) "Ultimate strength analysis of reinforced concrete sections subject to axial force and biaxial bending", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 166(1998):261–287.
- [165] Rosati, L., Marmo, F., Serpieri, R. (2008) "Enhanced solution strategies for the ultimate strength analysis of composite steel–concrete sections subject to axial force and biaxial bending", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197:1033–1055.
- [166] Weisstein, E.W., "Green's Theorem." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/GreensTheorem.html>.
- [167] Hildebrand, F.B. "Introduction to numerical analysis", 2<sup>nd</sup> edition, Dover republication, 1987.
- [168] Eibl, J. "Concrete Structures. Euro-design handbook", Ernst and Sohn, 1995.
- [169] Nawy, E.G., "Reinforced Concrete", ACI 2005 Update Edition, Prentice Hall, 2004.
- [170] Koumoussis, V.K., personal homepage, <http://users.ntua.gr/vkoum>.
- [171] Duan, L., Chen, W.-F. (1990) "A yield surface equation for doubly symmetrical sections", *ASCE, Journal of Engineering Structures*, (12):114-119.

- [172] Yen, J.Y.R. (1991) "Quasi-Newton method for reinforced concrete column analysis and design", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 117(3):657-666.
- [173] Parche, S. (2000) "A fibre model to simulate the cross-sectional behaviour of reinforced concrete columns under multi-directional earthquake", *Computers & Structures*, 77:403-411.
- [174] Kim, J-K., Lee, S-S. (2000) "The behaviour of reinforced concrete columns subjected to axial force and biaxial bending", *Engineering Structures*, 23:1518-1528.
- [175] Kim, J-K., Lee, S-S. (2000) "The behaviour of reinforced concrete columns subjected to axial force and biaxial bending", *Engineering Structures*, 23:1518-1528.
- [176] Charalampakis, A.E., Koumouisis, V.K. (2008) "Ultimate strength analysis of composite sections under biaxial bending and axial load", *Advances in Engineering Software*, 39:923-936, doi:10.1016/j.advengsoft.2008.01.007.
- [177] Τριανταφύλλου, Σ. & Χατζή, Ε. (2004) "Ανελαστική Ανάλυση Πολυωρόφων Κτιρίων από Ω.Σ. με υστερητικό προσομοίωμα κατά Bouc Wen", Διπλωματική Εργασία, ΕΜΠ.

## **Κεφάλαιο 9**

- [178] Inaudi, J.A., Makris, N. (1996) "Time-domain analysis of linear hysteretic damping", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25:529-545.
- [179] Dimizas, P., Koumouisis V.K. (2006) "Decay law for the hysteretic Bouc-Wen model", *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Nonlinear Normal Modes and Localization in Vibrating Systems*, Samos, Greece.



### **Παραρτήματα**

- [180] Lanczos, C. (1964) "A precision approximation of the Gamma Function", Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM): Series B, Numerical Analysis, 1:86-96.
- [181] Spouge, J. L. (1994) "Computation of the Gamma, Digamma, and Trigamma Functions", Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM): 31(3):931-944.



# Ευρετήριο



Bouc, R.....	42	Βελτιστοποίηση Σμήνους Σωματιδίων ..	167
Bounding .....	189	Διάγραμμα αλληλεπίδρασης .	245, 249, 251
Differential Evolution.....	165	Διάγραμμα ροπών-καμπυλοτήτων .....	242
Extended Kalman Filter .....	161	Διαξονική κάμψη.....	217
Fiber model.....	217	Εκθετική παράμετρος.....	111
Krasnosel'skiĭ, M.A. ....	42	Εξελικτικός αλγόριθμος.....	187
Levenberg – Marquardt.....	162	Επίλυση εξισώσεων.....	185
Micro-GA.....	164, 208	Επιφάνεια αστοχίας.....	233
myBiaxial .....	296	Εσωτερικές Μεταβλητές Κατάστασης.....	51
myBWDE .....	291	Θόρυβος .....	199
myBWID .....	295	Ιξώδης απόσβεση .....	113, 194, 197
myBWIDPSO .....	295	Καμπυλόγραμμα πολύγωνο.....	238
myBWMod .....	294	Καμπυλόγραμμα τραπέζιο .....	239
mySpec .....	291	Κλασικός Γενετικός Αλγόριθμος.....	162
Particle Swarm Optimization .....	167, 209	Μαρκοβιανοί Τελεστές.....	45
Pokrovskiĭ, A.V. ....	42	Μέγιστη αντοχή.....	232, 245
SawTooth-GA .....	188	Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων .....	160
Standard-GA .....	162, 208	Μέθοδος μέγιστης πιθανότητας.....	161
Αλγόριθμος Διαφορικής Εξέλιξης.....	165	Μειονεκτήματα προσομοιώματος.....	131
Αναλίσκόμενη ενέργεια.....	119, 125, 126	Μείωση αντοχής .....	55
Απόκριση .....	115	Μείωση δυσκαμψίας.....	55

Μικρο-γενετικός αλγόριθμος.....	164	αιτιότητας.....	45
Παραδοχή Euler – Bernoulli.....	219	ανεξαρτησίας από την ταχύτητα.....	47
Παραμετρικές μελέτες.....	202	Ταυτοποίηση παραμέτρων.....	194, 259
Παραμορφωμένη κατάσταση.....	235, 246	Ταυτοποίηση συστήματος.....	157
Περιορισμοί παραμέτρων.....	104, 302	Τελεστής	
Προσομοίωμα		Volterra.....	44
Baber-Noori.....	73	ιδιότητα διατάξεως.....	51
Bouc.....	61	ιδιότητα μονοτονικότητας.....	49
Bouc-Wen.....	70	ιδιότητα συνέχειας.....	50
Kuhn.....	54	ιδιότητα υποσυνόλου.....	50
Masing.....	53	με εσωτερικές μεταβλητές.....	51
Preisach.....	52	με μη τοπική μνήμη.....	45
Sivaselvan-Reinhorn.....	76	με τοπική μνήμη.....	45
ινών.....	217	μνήμης.....	44
πολυγραμμικό.....	55	Τροποποιημένο προσομοίωμα.....	139
πολυκαμπυλόγραμμο.....	57	Τυχαία διατομή.....	217, 238
τύπου Bouc-Wen.....	61, 301	Υστέρηση.....	41, 301
Σημεία αναστροφής.....	144	δυναμική.....	49
Σημείο διαρροής.....	112	εμπειρικά προσομοιώματα.....	54
Στένωση.....	55	ορισμός.....	41
Σύμμικτη διατομή.....	256	στατική.....	48
Συνθήκη		τελεστής.....	42

